बोर्ड परीक्षा परिणाम उन्नयन हेतु ऐतिहासिक पहल...

शेखावाटी मिशन-100

गणित

कक्षा – 12

कार्यालय : संयुक्त निदेशक स्कूल शिक्षा, चूरू संभाग, चूरू (राज.)
प्रभारी : शैक्षिक प्रकोष्ठ अनुभाग, जिला शिक्षा अधिकारी माध्यमिक, सीकर

: missionshekhawati100@gmail.com | 9413361111, 9828336296

टीम शेखावाटी मिशन-100

घनश्यामदत्त जाट
मुख्य जिला शिक्षा अधिकारी
झुन्झुनू-सीकर (राज.)

रमेशचन्द्र पूनियां
जिला शिक्षा अधिकारी
चूरू (राज.)

लालचन्द नहलिया
जिला शिक्षा अधिकारी मा.
सीकर (राज.)

अमर सिंह पचार
जिला शिक्षा अधिकारी (मा.)
झुन्झुनू (राज.)

रिछपाल सिंह मील
अति. जिला परि. समन्वयक
समग्र शिक्षा, सीकर (राज.)

महेन्द्र सिंह बड़सरा
सहायक निदेशक
कार्यालय संयुक्त निदेशक, चूरू

हरदयाल सिंह फगेड़िया
प्रभारी शेखावाटी मिशन-100
अति. जिला शिक्षा अधिकारी (मा.)
सीकर (राज.)

रामचन्द्र सिंह बगड़िया
अति. जिला शिक्षा अधिकारी (मा.)
सीकर (राज.)

नीरज सिहाग
अति. जिला शिक्षा अधिकारी (मा.)
झुन्झुनू (राज.)

सांवरमल गहनोलिया
अति. जिला शिक्षा अधिकारी (मा.)
चूरू (राज.)

महेश सेवदा
संयोजक शेखावाटी मिशन-100
सीकर (राज.)

रामावतार भदाला
सहसंयोजक शेखावाटी मिशन-100
सीकर (राज.)

तकनीकी सहयोग

राजीव कुमार, निजी सहायक | पवन ढाका, कनिष्ठ सहायक | महेन्द्र सिंह कोक, सहा. प्रशा. अधिकारी | अभिषेक चौधरी, कनिष्ठ सहायक

जिला शिक्षा अधिकारी माध्यमिक (मुख्यालय), सीकर

शैक्षिक प्रकोष्ठ अनुभाग, जिला शिक्षा अधिकारी माध्यमिक, सीकर

माननीय शिक्षा मंत्री की कलम से.....

!! शुभकामना संदेश !!

सम्मानित शिक्षक साथियों,

हम सभी के लिए यह गौरव का विषय है कि राजस्थान शिक्षा के क्षेत्र में नित नये आयाम छू रहा है। नीति आयोग के नेशनल अचीवमेंट सर्वे (NAS) 2020 में राजस्थान सम्पूर्ण भारत में तीसरे स्थान पर रहा है। इस वर्ष राजस्थान, इंस्पायर अवार्ड मानक योजना में 8027 बाल वैज्ञानिकों के चयन के साथ पूरे देश में प्रथम स्थान पर रहा हैं। इसी परम्परा व सोच को निरन्तर बनाए रखने के प्रयास में इस वर्ष शेखावाटी मिशन–100 का क्रियान्वयन संयुक्त निदेशक परिक्षेत्र चूरु के अधीन जिला शिक्षा अधिकारी (मुख्यालय) माध्यमिक शिक्षा सीकर द्वारा किया जा रहा है। अनुभवी तथा ऊर्जावान विषय विशेषज्ञों की लगन व अथक मेहनत से माध्यमिक शिक्षा बोर्ड राजस्थान द्वारा जारी संशोधित पाठ्यक्रम व मॉडल पेपर के आधार पर विषयवस्तु व मॉडल पेपर तैयार किये गये हैं, जिनको बोर्ड परीक्षा परिणाम उन्नयन के लिए विद्यार्थियों तक पहुँचाया जा रहा है।

मैं इस मिशन प्रभारी सहित सभी विषयाध्यापकों की कर्मठ टीम को धन्यवाद ज्ञापित करता हूँ, जिन्होंने अपनी समर्पित कार्यशैली से इस नवाचारी कार्य को अंजाम दिया है। मेरा सभी संस्थाप्रधानों से आग्रह है कि वे सभी विषयाध्यापकों से समन्वय कर इस परीक्षोपयोगी सामग्री को विद्यार्थियों तक पहुँचाना सुनिश्चित करें।

मैं आशा करता हूँ कि आपका प्रयास पूरे प्रदेश के विद्यार्थियों के लिए एक नवाचार साबित होगा एवं उनके लक्ष्यों की प्राप्ति में सहायक सिद्ध होगा।

शुभकामनाओं सहित।

3/3/21

गोविन्द सिंह डोटासरा
शिक्षा राज्य मंत्री (स्वतंत्र प्रभार)
राजस्थान सरकार, जयपुर

निदेशक महोदय की कलम से.....

!! शुभकामना संदेश !!

सम्मानित शिक्षक साथियों,

मुझे यह जानकर अत्यन्त प्रसन्नता हुई है कि संयुक्त निदेशक स्कूल शिक्षा, चूरु संभाग, चूरु के नेतृत्व में 'शेखावाटी मिशन–100' के तहत माध्यमिक तथा उच्च माध्यमिक परीक्षा 2021 में शामिल होने वाले विद्यार्थियों हेतु बोर्ड परीक्षा में उपयोगी विषयवस्तु एवं प्रश्नकोश तैयार किया जा रहा है हालांकि यह सत्र कोविड–19 के कारण प्रभावित रहा है इसमें विद्यार्थियों को अनेक परेशानियों का सामना करना पड़ा।

'शेखावाटी मिशन–100' की टीम ने विद्यार्थियों के हित को देखते हुए संशोधित पाठ्यक्रम के अनुसार नवाचार करने का प्रयास किया। विद्यार्थियों के लिए जो विषयवस्तु व प्रश्नकोश निर्माण किया है आशा करते है कि यह विद्यार्थियों के लिए निश्चित रूप से सफलता प्राप्त करने में लाभदायक सिद्ध होगा।

प्रतिभाशाली और कर्मठ ऊर्जावान शेखावाटी मिशन–100 की टीम को मेरी ओर से हार्दिक बधाई और उज्जवल भविष्य की शुभकामनाएँ।

शुभकामनाओं सहित।

सौरभ स्वामी (IAS)
निदेशक माध्यमिक शिक्षा राजस्थान,
बीकानेर

संयुक्त निदेशक की कलम से.....

!! शुभकामना संदेश !!

सम्मानित शिक्षक साथियों,

माध्यमिक शिक्षा बोर्ड राजस्थान की बोर्ड परीक्षाओं के परीक्षा परिणाम में मात्रात्मक एवं गुणात्मक अभिवृद्धि हेतु एक शैक्षिक नवाचार के रूप में 2017–18 में शेखावाटी मिशन–100 शुरु किया गया था। इस वर्ष शेखावाटी मिशन–100 की जिम्मेदारी संयुक्त निदेशक स्कूल शिक्षा चूरु संभाग के नेतृत्व में जिला शिक्षा अधिकारी (मुख्यालय) माध्यमिक सीकर को मिली है। इस नवाचारी पहल ने पिछले 03 वर्षो में चूरु संभाग में बोर्ड परीक्षा परिणाम में सफलता के नये आयाम बनाये हैं।

पिछले वर्षो में मिली इस अभूतपूर्व सफलता से अभिप्रेरित होकर इस वर्ष शेखावाटी मिशन–100 का दायरा बढ़ाकर 17 विषयों तक किया गया है। इस वर्ष कक्षा–10 के 07 विषयों (संस्कृत व उर्दू सहित) तथा कक्षा 12 में 10 विषयों, जिनमें अनिवार्य हिन्दी व अंग्रेजी के अलावा विज्ञान संकाय में 04 विषयों (भौतिक विज्ञान, रसायन विज्ञान, जीव विज्ञान व गणित) तथा कला संकाय में 04 विषयों (हिन्दी, साहित्य, राजनीति विज्ञान, इतिहास व भूगोल) के लिए बोर्ड द्वारा संशोधित पाठ्यक्रम व मॉडल पेपर के आधार पर अध्ययन सामग्री व मॉडल पेपर तैयार किये गये हैं। पाठ्य विषय वस्तु को इस प्रकार तैयार किया गया है कि सभी तरह के बौद्धिक स्तर वाले विद्यार्थी कम समय में भी अधिकतम अंक अर्जित कर सकेंगे।

शेखावाटी मिशन–100 में उन विषय विशेषज्ञों का चयन किया गया है जिनके पिछले वर्षो में अपने विषयों के गुणात्मक रूप से शानदार परीक्षा परिणाम रहे हैं।

मैं इस मिशन को सफल बनाने में सहयोग के लिए संभाग के सभी शिक्षा अधिकारियों एवं विषय विशेषज्ञों का तहेदिल से आभार व्यक्त करता हूँ।

शुभकामनाओं सहित।

लालचन्द बलाई
संयुक्त निदेशक
स्कूल शिक्षा, चूरू संभाग, चूरू

शेखावाटी मिशन-100

बोर्ड परीक्षा परिणाम उन्नयन कार्यक्रम सत्र : 2020-21
उच्च माध्यमिक परीक्षा - 2021

विषय : गणित-12

सर्वश्रेष्ठ सफलता सुनिश्चित करने हेतु सर्वश्रेष्ठ संकलन

हरदयाल सिंह फगेड़िया
प्रभारी शेखावाटी मिशन-100
अति. जिला शिक्षा अधिकारी (मा.)
सीकर (राज.)

जितेन्द्र फेनिन
संयोजक गणित
रा.उ.मा.वि., मूंडवाड़ा (सीकर)
मो. : 9414536161

कमल बिजारणियां
सहसंयोजक गणित
रा.उ.मा.वि., कुदन (सीकर)
मो. : 9461124313

बजरंग सिंह
रा.उ.मा.वि., काछवा (सीकर)

मंजू
रा.उ.मा.वि., पिपराली, सीकर

शैक्षिक प्रकोष्ठ अनुभाग, जिला शिक्षा अधिकारी माध्यमिक, सीकर

प्रतिलोम वृत्तीय फलन, परिसर, प्रांत, मुख्य मान, व्यापक मान प्रतिलोमव वृत्तीय फलनों के गुणधर्म

1. $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ बराबर है–

(अ) $\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ (ब) $\cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

(स) $\cos^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)$ (द) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (अ)

2. यदि $\tan^{-1}(1)+\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sin^{-1}(x)$ तो x का मान है–

(अ) –1 (ब) 0

(स) 1 (द) $-\frac{1}{2}$ (स)

3. यदि $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=x$ तो x का व्यापक मान है–

(अ) $2n\pi\pm\frac{\pi}{6}$ (ब) $\frac{\pi}{6}$

(स) $n\pi\pm\frac{\pi}{6}$ (द) $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$ (द)

4. $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=$

(अ) $\frac{\pi}{2}$ (ब) π

(स) $-\frac{\pi}{2}$ (द) 0 (अ)

5. $\cos^{-1}\left(\cos\frac{5\pi}{3}\right)$ का मान होगा–

(अ) $\frac{5\pi}{3}$ (ब) $\frac{\pi}{3}$

(स) $-\frac{\pi}{3}$ (द) इनमें से कोई नहीं (ब)

6. $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

हल : माना $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)=\theta$

$\Rightarrow \tan\theta=-\sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan\theta=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow \tan\theta=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$\left[\because -\frac{\pi}{2}<\tan^{-1}x<\frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow \theta=-\frac{\pi}{3}$

अतः $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$ का मुख्य मान $-\frac{\pi}{3}$ है।

7. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।

हल :

माना $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\theta$

$\Rightarrow \cos\theta=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cos\theta=-\cos\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \cos\theta=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow \cos\theta=\cos\frac{2\pi}{3}$

$\left[\because 0\le\cos^{-1}x\le\pi\right]$

$\Rightarrow \theta=\frac{2\pi}{3}$

अतः $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ का मुख्य मान $\frac{2\pi}{3}$ है।

8. $4\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\pi$ तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $4\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\pi$

$\Rightarrow 3\sin^{-1}x+\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\pi$

$\Rightarrow 3\sin^{-1}x+\frac{\pi}{2}=\pi$

$\left[\because \sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow 3\sin^{-1}x=\pi-\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow 3\sin^{-1}x = \dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \sin^{-1}x = \dfrac{\pi}{6}$

$\Rightarrow x = \sin\dfrac{\pi}{6}$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

अतः x का मान $\dfrac{1}{2}$ है।

9. सिद्ध कीजिए $\tan^{-1}\left(\dfrac{17}{19}\right) - \tan^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{7}\right)$

हल : वामपक्ष $= \tan^{-1}\left(\dfrac{17}{19}\right) - \tan^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{17}{19} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{17}{19}\times\frac{2}{3}}\right)$$

$$\left[\because \tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)\right]$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\frac{17\times3 - 2\times19}{19\times3}}{\frac{19\times3 + 17\times2}{19\times3}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{51-38}{57+34}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{13}{91}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$$

= दक्षिण पक्ष

10. यदि $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \dfrac{\pi}{2}$ तो सिद्ध कीजिए कि $xy + yz + zx = 1$

हल : दिया है– $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \dfrac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left[\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}\right] = \frac{\pi}{2}$$

$$\left[\because \tan^{-1}A + \tan^{-1}B + \tan^{-1}C = \tan^{-1}\left[\frac{A+B+C-ABC}{1-AB-BC-AC}\right]\right]$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx} = \tan\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx} = \frac{1}{0}$$

$$\left[\because \tan\frac{\pi}{2} = \infty = \frac{1}{0}\right]$$

$\Rightarrow 1 - xy - yz - zx = 0$

$\Rightarrow 1 - xy - yz - zx = 0$ [वज्र गुणन से]

$\Rightarrow xy + yz + zx = 1$ इति सिद्धम

Note -इसी प्रकार यदि $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z = \pi$ तो सिद्ध कीजिए $x + y + z = xyz$

11. यदि $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y + \cos^{-1}z = \pi$ तो सिद्ध कीजिए कि $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$

हल : $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y + \cos^{-1}z = \pi$

$\Rightarrow \cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \pi - \cos^{-1}z$

$\Rightarrow \cos^{-1}\left[xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right] = \cos^{-1}(-z)$

$\left[\pi - \cos^{-1}z = \cos^{-1}(-z)\right]$

$\Rightarrow xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} = -z$

$\Rightarrow xy + z = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$ (पक्षान्तरण से)

$\Rightarrow x^2y^2 + z^2 + 2xyz = (1-x^2)(1-y^2)$ (वर्ग करने पर)

$\Rightarrow x^2y^2 + z^2 + 2xyz = 1 - x^2 - y^2 + x^2y^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ इतिसिद्धम

12. सिद्ध कीजिए कि

$$4\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{70}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{99}\right) = \frac{\pi}{4}$$

हल : वाम पक्ष $= 4\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{5}\right) - \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{70}\right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{99}\right)$

$$= 2\left(2\tan^{-1}\frac{1}{5}\right) - \left[\tan^{-1}\frac{1}{70} - \tan^{-1}\frac{1}{99}\right]$$

$$= 2\tan^{-1}\left(\frac{2\times\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{25}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{70}-\frac{1}{99}}{1+\frac{1}{70}\times\frac{1}{99}}\right)$$

$$\left[\because 2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) \,\&\, \tan^{-1}(x)-\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)\right]$$

$$=2\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{99-70}{70\times 99+1}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{2\times\frac{5}{12}}{1-\frac{25}{144}}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{29}{6931}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{120}{119}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\times\frac{1}{239}}\right)$$

$=\tan^{-1}\left(\frac{28561}{28561}\right)=\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}=$ दक्षिण पक्ष

13. सिद्ध कीजिए

$$\tan\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right\}+\tan\left\{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)\right\}=\frac{2b}{a}$$

हल : माना कि $\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)=\theta\Rightarrow\cos 2\theta=\frac{a}{b}$

अतः वाम पक्ष $=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

$$=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{\pi}{4}.\tan\theta}+\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-\tan\theta}{1+\tan\frac{\pi}{4}.\tan\theta}$$

$$=\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}+\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\qquad\left[\because\tan\frac{\pi}{4}=1\right]$$

$$=\frac{(1+\tan\theta)^2+(1-\tan\theta)^2}{(1-\tan\theta)(1+\tan\theta)}=\frac{1+\tan^2\theta+2\tan\theta+1+\tan^2\theta-2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$=\frac{2\left(1+\tan^2\theta\right)}{1-\tan^2\theta}$$

$$=\frac{2}{\cos 2\theta}\quad\left[\because\cos 2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right]$$

$$=\frac{2}{\frac{a}{b}}\quad\left(\because\cos 2\theta=\frac{a}{b}\right)$$

$=\frac{2b}{a}=$ दक्षिण पद

14. सिद्ध कीजिए कि

$$\tan^{-1}x+\cot^{-1}(x+1)=\tan^{-1}\left(x^2+x+1\right)$$

हल : वाम पक्ष $=\tan^{-1}x+\cot^{-1}(x+1)$

$$=\tan^{-1}x+\tan^{-1}\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

$$\left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\cot^{-1}x\right]$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{x+\frac{1}{x+1}}{1-\frac{x}{x+1}}\right)$$

$$\left[\because\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right]$$

$$=\tan^{-1}\left[\frac{x(x+1)+1}{x+1-x}\right]$$

$=\tan^{-1}\left(x^2+x+1\right)=\mathrm{RHS}$ दक्षिण पक्ष

15. सिद्ध कीजिए कि $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)-\cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{16}{65}\right)$

हल : $LHS\ =\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)-\cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)$

$$=\sin^{-1}\frac{3}{5}-\sin^{-1}\left(\sqrt{1-\frac{144}{169}}\right)$$

$$\left[\because\cos^{-1}x=\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}\right]$$

$$=\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)-\sin^{1}\left(\frac{5}{13}\right)$$

$$=\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\sqrt{1-\frac{25}{169}}-\frac{5}{13}\sqrt{1-\frac{9}{25}}\right)$$

$$\left[\because\sin^{-1}x-\sin^{-1}y=\sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right)\right]$$

$$=\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}-\frac{5}{13}\times\frac{4}{5}\right)$$

$$=\sin^{-1}\left(\frac{36}{65}-\frac{20}{65}\right)$$

$$=\sin^{-1}\left(\frac{16}{65}\right)$$

$$=RHS$$

16. समीकरण हल कीजिए –

$$\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\frac{2\pi}{3} \text{ तथा } \cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\frac{\pi}{3}$$

हल : दिये गये समीकरण

$$\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\frac{2\pi}{3} \qquad \ldots 1$$

$$\cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\frac{\pi}{3} \qquad \ldots 2$$

समीकरण 2 में

$$\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}x \text{ तथा } \cos^{-1}y=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}y$$

रखने पर– $\left(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}x\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}y\right)=\frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow -\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\frac{\pi}{3} \qquad \ldots 3$$

समीकरण 1 व 3 को जोड़ने पर–

$$\left(\sin^{-1}x+\sin^{-1}y\right)+\left(-\sin^{-1}x+\sin^{-1}y\right)=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}x+\sin^{-1}y-\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\pi$$

$$\Rightarrow 2\sin^{-1}y=\pi$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}y=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow y=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

$y=1$ समीकरण 1 में रखने पर–

$$\sin^{-1}x+\sin^{-1}(1)=\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}x+\frac{\pi}{2}=\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}x=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}x=\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \qquad \text{अतः } x=\frac{1}{2}, y=1$$

17. समीकरण को हल कीजिए –

$$\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)-\sec^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)=\sec^{-1}b-\sec^{-1}a$$

हल : $\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)-\sec^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)=\sec^{-1}b-\sec^{-1}a$

$$\Rightarrow \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+\sec^{-1}a=\sec^{-1}\left(\frac{x}{b}\right)+\sec^{-1}b$$

(पक्षान्तरण से)

$$\Rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{a}{x}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{1}{a}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{b}{x}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{1}{b}\right)$$

$$\left[\because \sec^{-1}x=\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \cos^{-1}\left[\frac{a}{x}\times\frac{1}{a}-\sqrt{\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{a^2}\right)}\right]=\cos^{-1}\left[\frac{b}{x}\times\frac{1}{b}-\sqrt{\left(1-\frac{b^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}-\sqrt{\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{a^2}\right)}=\frac{1}{x}-\sqrt{\left(1-\frac{b^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{a^2}\right)}=-\sqrt{\left(1-\frac{b^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)}$$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{a^2}\right)=\left(1-\frac{b^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{1}{b^2}\right)$$

(वर्ग करने पर)

$$\Rightarrow 1-\frac{a^2}{x^2}-\frac{1}{a^2}+\frac{a^2}{x^2}\times\frac{1}{a^2}=1-\frac{1}{b^2}-\frac{b^2}{x^2}+\frac{b^2}{x^2}\times\frac{1}{b^2}$$

$$\Rightarrow -\frac{a^2}{x^2}-\frac{1}{a^2}=-\frac{b^2}{x^2}-\frac{1}{b^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}=\frac{a^2}{x^2}-\frac{b^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2-b^2}{a^2b^2}=\frac{a^2-b^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow a^2b^2=x^2$$

$$\Rightarrow x^2=a^2b^2 \qquad x=\pm ab$$

$x=-ab$ दिये गये समीकरण को संतुष्ट नहीं करती है।

अतः $x=ab$

इकाई–2 : आव्यूह

आव्यूह : परिभाषा एवं संकेतन क्रम समानता, आव्यूह के प्रकार शून्य तथा तत्समक आव्यूह, इकाई आव्यूह, एक आव्यूह का परिवर्तन, सममित तथा विषम सममित आव्यूह, आव्यूह पर संक्रियायें–योग अन्तर गुणन, अदिश गुणन, योग संक्रिया के गुणधर्म, गुणन संक्रिया के गुणधर्म, अदिश गुणन के गुणनधर्म।

1. यदि $\begin{bmatrix} k+4 & -1 \\ 3 & k-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ तो a का मान होगा –

(अ) 4 (ब) 3
(स) –4 (द) 6 (द)

2. यदि A आव्यूह का क्रम 3×5 है तो आव्यूह A में अवयवों की संख्या होगी –

(अ) 5 (ब) 15
(स) 10 (द) 3 (ब)

3. यदि दो आव्यूह A तथा B योग व गुणा के लिए अनुकुलनीय हो तो असत्य है –

(अ) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(ब) $(AB)^T = A^T B^T$

(स) $(A-B)^T = A^T - B^T$

(द) $(kA)^T = kA^T$ (k अदिश है) (ब)

4. यदि A तथा B समान कोटि के सममित आव्यूह है तो $AB-BA$ एक

(अ) विषम सममित आव्यूह
(ब) सममित आव्यूह
(स) शून्य आव्यूह
(द) तत्समक आव्यूह (अ)

5. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ तो $A+B =$

(अ) $\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$ (ब) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$

(स) $\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ (द) $\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ (स)

6. यदि $\begin{bmatrix} a+b & 2 \\ 7 & ab \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 8 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो a तथा b के मान ज्ञात कीजिए –

हल : दो आव्यूह समान आव्यूह है तो इनके संगत अवयव समान होंगे –

अतः $a+b=6$ 1

$ab=8$ 2

समीकरण 1 व 2 से –

$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$

$= (6)^2 - 4\times8$

$= 36-32$

$(a-b)^2 = 4$

$a-b = \pm2$

$a-b=2$ या $a-b=-2$ 3

समीकरण 1 व 3 से – $a=4, b=2$ या $a=2, b=4$

7. एक 2×2 क्रम का आव्यूह $A=[a_{ij}]$ ज्ञात कीजिए जिसके अवयव $a_{ij} = 2i-3j$ है।

हल : आव्यूह 2×2 का है अतः $i=1,2$ $j=1,2$

$a_{ij} = 2i-3j$

$a_{11} = 2\times1-3\times1 = 2-3 = -1$

$a_{21} = 2\times2-3\times1 = 4-3 = 1$

$a_{12} = 2\times1-3\times2 = 2-6 = -4$

$a_{22} = 2\times2-3\times2 = 4-6 = -2$

अतः अभीष्ट आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

8. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$ हो, $A+B^T$ तो ज्ञात कीजिए –

हल : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$ $B^T = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$

अतः $A+B^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2-1 & 3+3 & -4-5 \\ -1+2 & 2+4 & 3-6 \end{bmatrix}$$

$$A+B^T = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -9 \\ 1 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

9. यदि $A=\begin{bmatrix}4&2&-5\\1&0&3\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}6&-7&0\\-1&2&5\\1&0&3\end{bmatrix}$ तो AB ज्ञात करो।

हल : A का क्रम 2×3 तथा B का क्रम 3×3 है

अतः AB का अस्तित्व है –

$$AB=\begin{bmatrix}4&2&-5\\1&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&-7&0\\-1&2&5\\1&0&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4\times6+2\times(-1)+(-5)\times1 & 4\times(-7)+2\times2+(-5)\times0 & 4\times0+2\times5+(-5)\times3\\1\times6+0\times(-1)+3\times1 & 1\times(-7)+0\times2+3\times0 & 1\times0+0\times5+3\times3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}24-2-5 & -28+4+0 & 0+10-15\\6+0+3 & -7+0+0 & 0+0+9\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}17&-24&-5\\9&-7&9\end{bmatrix}$$

10. यदि $F(x)=\begin{bmatrix}\cos x&-\sin x&0\\\sin x&\cos x&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ तो प्रदर्शित कीजिए :

$$F(A)F(B)=F(A+B)$$

हल : $$F(x)=\begin{bmatrix}\cos x&-\sin x&0\\\sin x&\cos x&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

तब $$F(A)=\begin{bmatrix}\cos A&-\sin A&0\\\sin A&\cos A&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$F(B)=\begin{bmatrix}\cos B&-\sin B&0\\\sin B&\cos B&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$LHS=F(A).F(B)=\begin{bmatrix}\cos A&-\sin A&0\\\sin A&\cos A&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos B&-\sin B&0\\\sin B&\cos B&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos A\cos B-\sin A\sin B & -\sin B\cos A-\sin A\cos B & 0\\\sin A\cos B+\cos A\sin B & -\sin A\sin B+\cos A\cos B & 0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(A+B)&-\sin(A+B)&0\\\sin(A+B)&\cos(A+B)&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=F(A+B)$$

$$=R.H.S.$$

11. यदि $A=\begin{bmatrix}1&3\\2&1\\3&-1\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\\-1&0\end{bmatrix}$ हो, तो आव्यूह C ज्ञात कीजिए। जहां $A+2B+C=0$ जहां 0 शून्य आव्यूह है।

हल : $A+2B+C=0$

$$\Rightarrow C=0-A-2B$$

$$\Rightarrow C=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&3\\2&1\\3&-1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}2&1\\1&2\\-1&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&3\\2&1\\3&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&2\\2&4\\-2&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0-1-4&0-3-2\\0-2-2&0-1-4\\0-3+2&0+1-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&-5\\-4&-5\\-1&1\end{bmatrix}$$

अतः $$C=\begin{bmatrix}-5&-5\\-4&-5\\-1&1\end{bmatrix}$$

12. यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$ हो, तो AA^T ज्ञात कीजिए।

हल: $$A=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$A^T=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$A.A^T=\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos^2\theta+\sin^2\theta & -\cos\theta.\sin\theta+\sin\theta\cos\theta\\-\sin\theta.\cos\theta+\cos\theta.\sin\theta & \sin^2\theta+\cos^2\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

1. सारणिक $\begin{vmatrix} \cos 50^o & \sin 10^o \\ \sin 50^o & \cos 10^o \end{vmatrix}$ का मानहै।

(अ) 0 (ब) 1

(स) $\frac{1}{2}$ (द) $\frac{-1}{2}$ (स)

2. सारणिक $\begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ में प्रथम स्तम्भ के सहखण्ड है।

(अ) –1, 3 (ब) –1, –3

(स) –1,20 (द) –1,–20 (द)

3. यदि सारणिक $\begin{vmatrix} k & 8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$ हो तो k का मान होगा।

(अ) 4 (ब) 5

(स) 8 (द) 2 (ब)

4. यदि $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ एक तृतीय क्रम का सारणिक है, तथा $F_{11}, F_{12}.....F_{33}$ संगत अवयवों के सह खण्ड हो तो सत्य होगा–

(अ) $\Delta = a_{21}F_{21} + a_{22}F_{22} + a_{23}F_{23}$

(ब) $\Delta = a_{11}F_{11} + a_{21}F_{21} + a_{31}F_{31}$

(स) $\Delta = a_{13}F_{13} + a_{23}F_{23} + a_{33}F_{33}$

(द) सभी सत्य है। (द)

5. यदि w इकाई का घन मूल हो तो $\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 \\ w & w^2 & 1 \\ w^2 & 1 & w \end{vmatrix} =$

(अ) t (ब) 0

(स) w (द) w^2 (ब)

6. सारणिक $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta - (-\sin^2\theta)$

$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$

$= 1$

7. यदि $\begin{vmatrix} x & y \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ हो, तो $x : y$ ज्ञात कीजिए।

हलः $\begin{vmatrix} x & y \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 4x - 2y = 0$ (सारणिक के प्रसार से)

$\Rightarrow 4x = 2y$

$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

अतः x : y = 1 : 2

8. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 1 \\ 9 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 1 \\ 9 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(27-1) - 3(9-9) + 9(3-81)$

(प्रथम पंक्ति के अनुसार विस्तार से)

$= 26 - 0 + 9 \times (-78)$

$= 26 - 702$

$= -676$

9. सिद्ध कीजिए $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{vmatrix} = 1 + a^2 + b^2 + c^2$

हलः L.H.S. = $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ -a & 1 & c \\ -b & -c & 1 \end{vmatrix}$

(प्रथम पंक्ति के अनुसार विस्तार करने पर)

$= 1(1 + c^2) - a(-a + bc) + b(ac + b)$

$= 1 + c^2 + a^2 - abc + bac + b^2$

$= 1 + c^2 + a^2 + b^2$

$= 1 + a^2 + b^2 + c^2 =$ R. H. S.

10. सारणिक $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ का मान सारूस आकृति से ज्ञात कीजिए।

हलः $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

[$\because$ तीन अग्रणी विकर्णों के अवयवों के गुणन के योग में से, तीन पिछले विकर्णों के अवयवों के गुणन के योग को घटाते है।]

$= (2\times5\times5+4\times2(-1)+1\times8\times3)-$

$(-1\times5\times1+3\times2\times2+5\times8\times4)$

$= (50-8+24)-(-5+12+160)$

$= 66-167$

$= -101$

अतः $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -101$

11. सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ में प्रथम स्तम्भ के अवयवों की उपसारणिक एवं सहखण्ड लिखकर उस का मान भी ज्ञात कीजिए।

हलः माना $A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

उपसारणिक $A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$ $A_{21} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$ $A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

$=-2-10$ $\quad = -6-10 = -6+2$

$A_{11} = -12$ $\quad A_{21} = -16$ $\quad A_{31} = -4$

सहखण्ड

$F_{11} = A_{11} = -12$ $\quad F_{21} = -A_{21} = 16$ $\quad F_{31} = A_{31} = -4$

सारणिकं A का मान $= 1.F_{11} + 4F_{21} + 3F_{31}$

$= 1\times(-12)+4\times16+3\times(-4)$

$= -12+64-12$

$= 40$

12. यदि $\begin{vmatrix} x-1 & x-2 \\ x & x-3 \end{vmatrix} = 0$ हो, तो X कामानज्ञातकीजिए।

हलः $\begin{vmatrix} x-1 & x-2 \\ x & x-3 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x-3)-x(x-2)=0$

$\Rightarrow x^2-x-3x+3-x^2+2x=0$

$\Rightarrow -2x+3=0$

$\Rightarrow -2x=-3$

$\Rightarrow x = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$ अतः $x = \frac{3}{2}$

1. यदि आव्यूह

$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ हो, तो A का सहखण्डज आव्यूह $\left(adjA\right)=$

(अ) $\begin{bmatrix}1 & -3\\ -2 & 4\end{bmatrix}$ (ब) $\begin{bmatrix}1 & -3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

(स) $\begin{bmatrix}4 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ (द) $\begin{bmatrix}4 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ (द)

2. यदि किसी वर्ग आव्यूह A की सारणिक $|A|=0$ हो, तो आव्यूह होगा –

(अ) व्युत्क्रमणीय आव्यूह (ब) अव्युत्क्रमणीय आव्यूह

(स) इकाई आव्यूह (द) सममित आव्यूह (ब)

3. यदि एक त्रिभुज के शीर्ष $\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)$ तथा $\left(x_3,y_3\right)$ हो, तो त्रिभुज का क्षेत्रफल होगा –

(अ) $\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$ (ब) $\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$

(स) $\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & 1\\ y_1 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$ (द) $\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & x_3\\ x_2 & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$ (अ)

4. आव्यूह $\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ x & 2 & -3\end{bmatrix}$ व्युत्क्रमणीय होगा यदि–

(अ) $x=-1$ (ब) $x\neq 1$

(स) $x\neq -1$ (द) $x=1$ (स)

5. आव्यूह $\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}$ काव्युत्क्रमणीय आव्यूह ज्ञात कीजिए।

हल : मानाआव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}$

$\therefore\ |A|=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 1 & 4 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}=1\left(16-9\right)-3\left(4-3\right)+3\left(3-4\right)$

$=7-3-3=1$

$|A|\neq 0$, अतः A^{-1} काअस्तित्व हैं।

सारणिक A के

अवयवों के सहखण्ड $F_{11}=\begin{vmatrix}4 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}=16-9=7$

$F_{12}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-\left(4-3\right)=-1$

$F_{13}=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}=3-4=-1$

$F_{21}=-\begin{vmatrix}3 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-\left(12-9\right)=-3$

$F_{22}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}=4-3=1$

$F_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=0$ $F_{31}=\begin{vmatrix}3 & 3\\ 4 & 3\end{vmatrix}=9-12=-3$

$F_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=0$

अतः आव्यूह A का सहखण्डज

आव्यूह $adjA=\begin{bmatrix}7 & -1 & -1\\ -3 & 1 & 0\\ -3 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$

$\Rightarrow adjA=\begin{bmatrix}7 & -3 & -3\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$\therefore\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}.adjA=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}7 & -3 & -3\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$A^{-1}=\begin{bmatrix}7 & -3 & -3\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

6. सिद्ध कीजिए कि

आव्यूह $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ समीकरण $A^2-6A+17I=0$ को संतुष्ट करता है तथा A^{-1} भी ज्ञात कीजिए।

हल : $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\3 & 4\end{bmatrix}$

$$A^2=A.A=\begin{bmatrix}2 & -3\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -3\\3 & 4\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}4-9 & -6-12\\6+12 & -9+16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & -18\\18 & 7\end{bmatrix}$$

अतः

$$A^2-6A+17I=\begin{bmatrix}-5 & -18\\18 & 7\end{bmatrix}-6\begin{bmatrix}2 & -3\\3 & 4\end{bmatrix}+17\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-5 & -18\\18 & 7\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}12 & -18\\18 & 24\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}17 & 0\\0 & 17\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-5-12+17 & -18+18+0\\18-18+0 & 7-24+17\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=0$$

$\Rightarrow A^2-6A+17I=0$ को संतुष्ट करता है।

पुनः $|A|=\begin{vmatrix}2 & -3\\3 & 4\end{vmatrix}=8+9=17\neq 0$

अतः A^{-1} का अस्तित्व है–

$$adjA=\begin{bmatrix}4 & -3\\3 & 2\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}4 & 3\\-3 & 2\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}adjA=\frac{1}{17}\begin{bmatrix}4 & 3\\-3 & 2\end{bmatrix}$$

7. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & \tan\alpha\\-\tan\alpha & 1\end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए

$$A^T A^{-1}=\begin{bmatrix}\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha\\\sin 2\alpha & \cos 2\alpha\end{bmatrix}$$

हल : $A=\begin{bmatrix}1 & \tan\alpha\\-\tan\alpha & 1\end{bmatrix}$

$$|A|=\begin{bmatrix}1 & \tan\alpha\\-\tan\alpha & 1\end{bmatrix}=1+\tan^2\alpha$$

आव्यूह A का सहखण्डज आव्यूह

$$adjA=\begin{bmatrix}1 & \tan\alpha\\-\tan\alpha & 1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1 & -\tan\alpha\\\tan\alpha & 1\end{bmatrix}$$

$$A^T=\begin{bmatrix}1 & -\tan\alpha\\\tan\alpha & 1\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{adjA}{|A|}=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}\begin{bmatrix}1 & -\tan\alpha\\\tan\alpha & 1\end{bmatrix}$$

अतः $L.H.S.=A^T.A^{-1}$

$$=\begin{bmatrix}1 & -\tan\alpha\\\tan\alpha & 1\end{bmatrix}.\frac{1}{1+\tan^2\alpha}\begin{bmatrix}1 & -\tan\alpha\\\tan\alpha & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}\begin{bmatrix}1-\tan^2\alpha & -2\tan\alpha\\2\tan\alpha & -\tan^2\alpha+1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} & \frac{-2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\\\frac{2\times\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} & \left(\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\right)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha\\\sin 2\alpha & \cos 2\alpha\end{bmatrix}=R.H.S.$$

8. सारणिक का प्रयोगकर शीर्ष $(1,4),(2,3)$ तथा $(-5,-3)$ वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। क्या दिये गये बिन्दु संरेखीय है ?

हलः माना दिये गये शीर्ष $A(1,4),B(2,3)$ तथा $C(-5,-3)$ है।

अतः ΔABC का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\x_2 & y_2 & 1\\x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 4 & 1\\2 & 3 & 1\\-5 & -3 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\left[1(3+3)-4(2+5)+1(-6+15)\right]$$

$$=\frac{1}{2}[6-28+9]$$

$=\frac{-13}{2}=\left|\frac{-13}{2}\right|=\frac{13}{2}$ वर्ग इकाई

[$\because$ क्षेत्रफल धनात्मक होता है।]

अतः त्रिभुजका क्षेत्रफल $=\frac{13}{2}$ वर्ग इकाई

त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य नहीं है अतः दिये गये बिन्दु संरेखीय नहीं है।

9. यदिबिन्दु $(3,-2),(x,2)$ तथा $(8,8)$ संरेख है तो x का मान सारणिक के प्रयोग से ज्ञात करो।

हलः यदि दिये गये बिन्दु संरेख है तो बिन्दुओं से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य होगा अतः $\Delta=0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ x & 2 & 1\\ 8 & 8 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ x & 2 & 1\\ 8 & 8 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow 3(2-8)+2(x-8)+1(8x-16)=0$$

$$\Rightarrow -18+2x-16+8x-16=0$$

$$\Rightarrow 10x-50=0$$

$$\Rightarrow 10x=50$$

$$x=\frac{50}{10}=5$$

अतः x का मान 5 है।

10. सारणिक प्रयोग से दो बिन्दुओं $(3,1)$ तथा $(9,3)$ से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : दो बिन्दुओं से गुजरने वाली रेखा का समीकरण

$$\begin{vmatrix}x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}x & y & 1\\ 3 & 1 & 1\\ 9 & 3 & 1\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow x(1-3)-y(3-9)+1(9-9)=0$$

$$\Rightarrow -2x+6y+0=0$$

$$\Rightarrow x-3y=0$$

अतः अभीष्ट रेखाकासमीकरण $x-3y=0$ है।

11. आव्यूह सिद्धान्त का प्रयोग कर निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए –

$$6x+y-3z=5,\ x+3y-2z=5,\ 2x+y+4z=8$$

हल : दिया गया समीकरण निकाय –

$$6x+y-3z=5$$
$$x+3y-2z=5$$
$$2x+y+4z=8$$

रैखिक समीकरण निकाय का आव्यूह रूप

$$\begin{bmatrix}6 & 1 & -3\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 5\\ 8\end{bmatrix}$$

$$AX=B \quad A=\begin{bmatrix}6 & 1 & -3\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}5\\ 5\\ 8\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X=A^{-1}B$$

$$|A|=\begin{vmatrix}6 & 1 & -3\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}=6(12+2)-1(4+4)-3(1-6)=84-8+15=91$$

$$adjA=\begin{bmatrix}14 & -8 & -5\\ -7 & 30 & -4\\ 7 & 9 & 17\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}14 & -7 & 7\\ -8 & 30 & 9\\ -5 & -4 & 17\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{adjA}{|A|}=\frac{1}{91}\begin{bmatrix}14 & -7 & 7\\ -8 & 30 & 9\\ -5 & -4 & 17\end{bmatrix}$$

अतः $X=A^{-1}B$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\frac{1}{91}\begin{bmatrix}14 & -7 & 7\\ -8 & 30 & 9\\ -5 & -4 & 17\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 5\\ 8\end{bmatrix}=\frac{1}{91}\begin{bmatrix}70-35+56\\ -40+150+72\\ -25-20+136\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\frac{1}{91}\begin{bmatrix}91\\ 182\\ 91\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$$ अतः समीकरण निकाय का

हल $x=1, y=2, z=1$

$\Rightarrow x=1 \qquad z=1$

$y=2$

12. यदि समबाहु त्रिभुज की भुजा a है तथा शीर्ष (x_1,y_1), (x_2,y_2) तथा (x_3,y_3) हो तो सिद्ध कीजिए कि –

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 2 \\ x_2 & y_2 & 2 \\ x_3 & y_3 & 2 \end{vmatrix}^2 = 3a^4$$

हल : यदि समबाहु त्रिभुज की भुजा a हैतो त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \qquad ...1$$

शीर्ष $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ हो तो सारणिक में त्रिभुज

का क्षेत्रफल $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad ...2$

समीकरण 1 व 2 से –

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$\Rightarrow 2\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{3}a^2$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 2 \\ x_2 & y_2 & 2 \\ x_3 & y_3 & 2 \end{vmatrix} = \sqrt{3}a^2$$

वर्ग करने पर –

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 2 \\ x_2 & y_2 & 2 \\ x_3 & y_3 & 2 \end{vmatrix}^2 = 3a^4 \qquad \cdots H.P.$$

13. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात करो। तत्पश्चात् इसकी सहायता से निम्न रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए।

$$x + y + 2z = 0,\ x + 2y - z = 9,\ x - 3y + 3z = -14$$

हलः समीकरण निकाय का आव्यूह रूप –

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ -14 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 1(6-3) - 1(3+1) + 2(-3-2)$$

$$= 3 - 4 - 10$$

$$= -11$$

$$\Rightarrow |A| = -11 \neq 0$$

अतः

$$adjA = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ -9 & 1 & +4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -9 & -5 \\ -4 & 1 & 3 \\ -5 & +4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} 3 & -9 & -5 \\ -4 & 1 & 3 \\ -5 & +4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 3 & -9 & -5 \\ -4 & 1 & 3 \\ -5 & +4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ -14 \end{bmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 0-81+70 \\ 0+9-42 \\ 0+36-14 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = 1, y = 3, z = -2$$

अतः $A^{-1} = \frac{-1}{11}\begin{bmatrix} 3 & -9 & -5 \\ -4 & 1 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ तथा समीकरण निकाय का

हल $x = 1, y = 3, z = -2$

14. आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात कीजिए तथा इसकी सहायता से निम्नलिखित समीकरण निकाय का हल कीजिए।

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2y \\ 6z \\ -2x \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

हल : समीकरण निकाय

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2y\\6z\\-2x\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x+z\\2x+y\\y+z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\3z\\-x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\0\\2\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x+z\\2x+y\\y+z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y+4\\3z+0\\-x+2\end{bmatrix}\qquad \begin{aligned}x+z&=y+4\\ \Rightarrow\ 2x+y&=3z\\ y+z&=-x+2\end{aligned}$$

अतः $\begin{aligned}x-y+z&=4\\2x+y-3z&=0\\x+y+z&=2\end{aligned}$

$AX=B$ तब $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&1&-3\\1&1&1\end{bmatrix}$ $X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}4\\0\\2\end{bmatrix}$

$$|A|=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&1&-3\\1&1&1\end{bmatrix}=1(1+3)+1(2+3)+1(2-1)=4+5+1=10\neq 0$$

$$adjA=\begin{bmatrix}4&-5&1\\2&0&-2\\2&5&3\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}4&2&2\\-5&0&5\\1&-2&3\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{adjA}{|A|}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}4&2&2\\-5&0&5\\1&-2&3\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}4&2&2\\-5&0&5\\1&-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\0\\2\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}16+0+4\\-20+0+10\\4+0+6\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}20\\-10\\10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}$ अतः समीकरण निकाय का हल $x=2, y=-1, z=1$

इकाई–5 : संततता तथा अवकलनीयता

1. यदि $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}; x=3$ पर सतत है तब $f(3)$ का मान होगा–

(अ) 6 (ब) 3
(स) 1 (द) 0 (अ)

2. फलन $f(x)=x|x|$ के उन बिन्दुओं का समुच्चय, जिन पर वह अवकलनीय होगा–

(अ) $(0,\infty)$ (ब) $(-\infty,\infty)$
(स) $(-\infty,0)$ (द) $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ (ब)

3. फलन $f(x)=x-[x]$ की $x=3$ पर संततता का परीक्षण कीजिए।

हलः $f(x)=x-[x]$

$x=3$ पर
बांयी सीमा

$$=f(3-0)=\lim_{h\to0}f(3-h)=\lim_{h\to0}\{3-h-[3-h]\}$$

$\{\because[3-h]=2\}$

$$=\lim_{h\to0}\{3-h-2\}=\lim_{h\to0}(1-h)=1 \qquad ...1$$

दांयी सीमा

$$=f(3+0)=\lim_{h\to0}f(3+h)=\lim_{h\to0}\{3+h-[3+h]\}=\lim_{h\to0}\{3+h-3\}$$

$$=\lim_{h\to0}(h)=0 \qquad ...2$$

$\{\because[3+h]=3\}$

समीकरण 1 व 2 से–

$f(3+0)\neq f(3-0)$

अतः $x=3$ पर अभीष्ठ फलन सतत नहीं है।

4. फलन $f(x)=|x-1|$ का $x=1$ पर संतत्यता परीक्षण कीजिए।

हलः $|(x-1)|=\begin{cases}1-x & if\ x<1\\ x-1 & if\ x\geq 1\end{cases}$

यहां $f(1)=(1-1)=0 \qquad ...1$

$x=1$ पर दांयी सीमा

$$f(1+0)=\lim_{h\to0}f(1+h)=\lim_{h\to0}(1+h-1)=\lim_{h\to0}h=0 \qquad ...2$$

$x=1$ पर बांयी सीमा

$$f(1-0)=\lim_{h\to0}f(1-h)=\lim_{h\to0}\{1-(1-h)\}=\lim_{h\to0}(h)=0 \qquad ...3$$

समीकरण 1, 2 व 3 से–

$$f(1)=f\left(1+0\right)=f\left(1-0\right)=0$$

अतः फलन $f\left(x\right), x=1$ पर सतत है।

5. m के किन मानों के लिए फलन

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x^m \sin\dfrac{1}{x} & ; \quad x\neq 0 \\ 0 & ; \quad x=0 \end{cases}$$ बिन्दु $x=0$ पर अवकलनीय है।

हलः $x=0$ पर

बांया अवकलज $=f'\left(0-0\right)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(0-h\right)-f(0)}{-h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(-h\right)^m \sin\dfrac{1}{(-h)}-0}{-h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(-1\right)^m h^{m-1}\sin\frac{1}{h} \qquad ...1$$

दांया अवकलज $=f'\left(0+0\right)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(0+h\right)-f\left(0\right)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(h\right)^m \sin\left(\dfrac{1}{h}\right)-0}{h} \quad =\lim_{h\to 0}h^{m-1}\sin\frac{1}{h} \qquad ...2$$

समीकरण 1 व 2 से स्पष्ट है कि $f(x), x=0$ पर अवकलनीय है तब $f'(0+0)=f'\left(0-0\right)$ ये तभी संभव है जब $m-1>0 \Rightarrow m>1$

6. फलन $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} & ; \quad x\neq 0 \\ 0 & ; \quad x=0 \end{cases}$ का $x=0$ पर सांतत्य का परीक्षण कीजिए।

हलः $x=0$ पर

दांयी सीमा

$$=f(0+0)=\lim_{h\to 0}f\left(0+h\right)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{\frac{1}{0+h}}}{1+e^{\frac{1}{0+h}}}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{\frac{1}{h}}}{1+e^{\frac{1}{h}}}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{e^{\frac{1}{h}}}{e^{\frac{1}{h}}\left(e^{-\frac{1}{h}}+1\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\left(e^{-\frac{1}{h}}+1\right)}=\frac{1}{0+1}=1 \qquad ...1$$

बांयी सीमा

$$=f\left(0-0\right)=\lim_{h\to 0}f\left(0-h\right)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{\frac{1}{0-h}}}{1+e^{\frac{1}{0-h}}}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h}}}{1+e^{-\frac{1}{h}}}$$

$$=\frac{0}{1+0}=\frac{0}{1}=0 \qquad ...2$$

समीकरण 1 व 2 से $f\left(0+0\right)\neq f\left(0-0\right)$ अतः $x=0$ पर संतत नहीं है।

इकाई–6: अवकलज

1. फलन $y=\cos\sqrt{x}$ का x के सापेक्ष अवकलन होगा–

(अ) $\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ (ब) $\dfrac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

(स) $-2\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$ (द) $2\sqrt{x}.\sin\sqrt{x}$ (ब)

हलः $y=\cos\sqrt{x}$

तब $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left\{\cos\sqrt{x}\right\}=-\sin\sqrt{x}\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)=\dfrac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

2. यदि $y=x^x$ तो $\dfrac{dy}{dx}$ होगा–

(अ) $x^x\log\left(ex\right)$ (ब) $x^x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

(स) $\left(1+\log x\right)$ (द) $x^x\log x$ (अ)

हलः $y=x^x$

$$\Rightarrow \log_e y=x\log x \qquad ...1$$

x के सापेक्ष अवकलन से–

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\log_e x+x\times\frac{1}{x}=1+\log_e x=\log_e e+\log_e x=\log_e\left(ex\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=y\log_e\left(ex\right)=x^x\log_e\left(ex\right)$$

3. फलन $y=\sin\left\{\cos\left(x^2\right)\right\}$ का x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए।

हलः $y=\sin\left\{\cos\left(x^2\right)\right\}$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left[\sin\left\{\cos\left(x^2\right)\right\}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\cos\left\{\cos\left(x^2\right)\right\}\frac{d}{dx}\left\{\cos\left(x^2\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos\left\{\cos\left(x^2\right)\right\}\left\{-\sin\left(x^2\right)\right\}\frac{d}{dx}\left(x^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2x\cos\left\{\cos\left(x^2\right)\right\}\sin\left(x^2\right)$$

4. फलन $y = \sin x^{o}$ का x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए।

हल: $y = \sin x^{o} = \sin\left(\frac{\pi}{180}x\right)$ ...1

समीकरण 1 का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{180}x\right)\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos\left(\frac{\pi}{180}x\right)\frac{d}{dx}\left\{\frac{\pi}{180}x\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{180}\cos\left(\frac{\pi}{180}x\right) = \frac{\pi}{180}\cos x^{o}$$

5. फलन $y = x^{\log x}$ का x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए।

हल: $y = x^{\log_e x}$

कृकृ1

$$\Rightarrow \log_e y = \log_e x^{(\log_e x)} = \log_e x.\log_e x$$

x के सापेक्ष अवकलन से–

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\log_e x + \frac{1}{x}\log_e x = \frac{2}{x}\log_e x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}\log_e x = \frac{2x^{(\log_e x)}}{x}\log_e x$$

(समीकरण 1 से)

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x^{(\log_e x-1)}\log_e x$$

6. यदि $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+....\infty}}}$ तब $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल: $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+....\infty}}}$

$$\Rightarrow y = \sqrt{x+y}$$

$\Rightarrow y^2 = x+y$ ...1

x के सापेक्ष अवकलन से–

$$2y\frac{dy}{dx} = 1+\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow (2y-1)\frac{dy}{dx} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y-1}$$

7. यदि $y = a^{\tan 3x}$ तब $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल: $y = a^{\tan 3x}$ ...1

समीकरण 1 का x के सापेक्ष अवकलन से–

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(a^{\tan 3x}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = a^{\tan 3x}.\log_e a\frac{d}{dx}(\tan 3x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \log_e a.a^{\tan 3x}.\sec^2 3x\frac{d}{dx}(3x)$$

8. यदि $y = a\sin x - b\cos x$ हैतो $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $y = a\sin x - b\cos x$ ...1

समीकरण 1 का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\frac{dy}{dx} = a\cos x + b\sin x$ ...2

समीकरण 2 का x के सापेक्ष अवकलन करने पर–

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a\sin x + b\cos x$$

9. यदि $y = \sqrt{\log x+\sqrt{\log x+\sqrt{\log x+.....\infty}}}$ होतो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\because y = \sqrt{\log x+\sqrt{\log x+\sqrt{\log x+.....\infty}}}$

$$\Rightarrow y = \sqrt{\log x + y}$$

$\Rightarrow y^2 = \log x + y$ ...1

समीकरण 1 का x के सापेक्ष अवकलन करने से–

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}+\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow (2y-1)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(2y-1)}$$

10. यदि $y = \log_e\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ है तो $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $y = \log_e\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}\left[\log_e(1-\cos x)-\log(1+\cos x)\right] \quad ...1$$

समीकरण 1 का x के सापेक्ष अवकलन करने पर–

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}\{\log(1-\cos x)\}-\frac{d}{dx}\{\log(1+\cos x)\}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\cos x}\frac{d}{dx}(1-\cos x)-\frac{1}{1+\cos x}\frac{d}{dx}(1+\cos x)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\sin x}{2}\left[\frac{1}{1-\cos x}+\frac{1}{1+\cos x}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\sin x}{2}\left[\frac{1+\cos x+1-\cos x}{1-\cos^2 x}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\sin x}{2}\left[\frac{2}{\sin^2 x}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sin x}=\operatorname{cosec} x$$

11. यदि $x^3+y^3-3axy=0$ तक सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2a^3xy}{\left(ax-y^2\right)^3}$$

हलः दिया है कि $x^3+y^3-3axy=0$ ...1

x के सापेक्ष अवकन करने पर–

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-3ay-3ax\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2\frac{dy}{dx}-a\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)=0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(ax-y^2\right)=x^2-ay \quad ...2$$

x के सापेक्ष पुनः अवकलन करने पर–

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left(ax-y^2\right)+\frac{dy}{dx}\left(a-2y\frac{dy}{dx}\right)=2x-a\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}\left(ax-y^2\right)+2\frac{dy}{dx}\left(a-y\frac{dy}{dx}\right)=2x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}\left(ax-y^2\right)+2\left(\frac{x^2-ay}{ax-y^2}\right)\left(a-y\frac{x^2-ay}{ax-y^2}\right)=2x$$

(समीकरण 2 से)

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}\left(ax-y^2\right)+2\left(\frac{x^2-ay}{ax-y^2}\right)\left[\frac{a\left(ax-y^2\right)-y\left(x^2-ay\right)}{ax-y^2}\right]=2x$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}\left(ax-y^2\right)^3+2\left(x^2-ay\right)\left(a^2x-yx^2\right)=2x\left(ax-y^2\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}\left(ax-y^2\right)^3+2a^2x^3-2x^4y-2a^3xy+2ax^2y^2=2a^2x^3+2xy^4-4ax^2y^2$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}\left(ax-y^2\right)^3=2xy\left(y^3+x^3-3axy\right)+2a^3xy$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}\left(ax-y^2\right)^3=2xy(0)+2a^3xy$$

(समीकरण 1 से)

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}\left(ax-y^2\right)^3=2a^3xy$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2a^3xy}{\left(ax-y^2\right)^3}$$

1. a का वह मान समूह क्या होगा जिसके लिए अन्तराल $[1,2]$ में $f(x)=x^2+ax+1$ वर्धमान है।

(अ) $(-\infty,\infty)$ (ब) $(-\infty,-2)$

(स) $(-2,\infty)$ (द) $(-\infty,0)$ (स)

हलः दिया है $f(x)=x^2+ax+1$

$\Rightarrow f'(x)=2x+a$ ...1

$f(x)$ के अन्तराल $[1,2]$ में वर्धमान होने के लिए $f'(x)>0, \forall x\in R$ अब $f'(x)=(2x+a)$ अन्तराल $[1,2]$ में वर्धमान है तो $f'(x)$ का न्यूनतम मान $f'(1)=(2+a)$ होगा।

अतः $f'(a)=2+a>0$
$\Rightarrow a>-2$

अतः a का अभीष्ठ मान समूह $a\in(-2,\infty)$ होगा।

2. वक्र $y=x^3-x$ बिन्दु $x=2$ परस्पर्श रेखा की प्रवणता होगी–

(अ) 6 (ब) 9

(स) 11 (द) 13 (स)

हलः दिया है

$y=x^3-x$ ...1

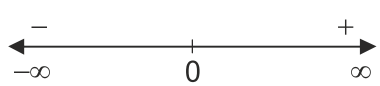
$$\frac{dy}{dx}=3x^2-1$$

दिये वक्र की $x=2$ परस्पर्श रेखा की प्रवणता

$$\Rightarrow\left(\frac{dy}{dx}\right)_{at\ x=2}=3\times(2)^2-1=12-1=11$$

3. सिद्ध कीजिए $f(x)=x^2$ अन्तराल $(0,\infty)$ में वर्धमान तथा अन्तराल $(-\infty,0)$ मेंह्रासमानहै।

हलः $f(x)=x^2$



$f'(x)=2x$

अब $f'(x)=2x=0 \quad \Rightarrow x=0$

अतः $x=0$ क्रान्ति कबिन्दु है।
वर्धमान के लिए

$f'(x)>0 \quad \Rightarrow 2x>0 \quad \Rightarrow x>0 \Rightarrow x\in(0,\infty)$

अतः $f(x)=x^2$ अन्तराल $(0,\infty)$ में वर्धमान है।
ह्रासमान के लिए

$f'(x)<0 \Rightarrow 2x<0 \Rightarrow x<0 \Rightarrow x\in(-\infty,0)$

अतः $f(x)=x^2$ अन्तराल $(-\infty,0)$ में ह्रासमान है।

4. सिद्ध कीजिए किचर घांताकी फलन e^x वर्धमान फलन है।

हलः दिया है

$f(x)=e^x$

$\Rightarrow f'(x)=e^x$ ...1

Case 1

जब $x>0$ तब समीकरण 1 से $f'(x)>0$

अतः $x>0$ के लिए फलन वर्धमान है।

Case 2

जब $x<0$ तबसमीकरण 1 से

$$f'(x)=e^{(Negative)}=\frac{1}{e^{(\text{Positive})}}>0$$

अतः $x<0$ के लिए फलन वर्धमान है।

Case 3

जब $x=0$ तब समीकरण 1 से $f'(0)=e^0=1>0$

अतः $x=0$ के लिए फलन वर्धमान है।

अतः फलन $f(x)=e^x$ एक वर्धमान फलन है।

5. वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें फलन $f(x)=2x^3-3x^2-36x+7$ (i) वर्धमान है (ii) ह्रासमान है।

हलः

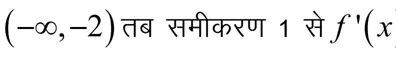
$f(x)=2x^3-3x^2-36x+7$

$\Rightarrow f'(x)=6x^2-6x-36$

$\Rightarrow f'(x)=6(x^2-x-6)$

$\Rightarrow f'(x)=6(x-3)(x+2)$ ...1

समीकरण 1 से $x=3$ तथा $x=-2$ क्रान्तिक बिन्दु प्राप्त होते है।



जब $x\in(-\infty,-2)$ तब समीकरण 1 से $f'(x)>0$

जब $x\in(-2,3)$ तब समीकरण 1 से $f'(x)<0$

जब $x\in(3,\infty)$ तब समीकरण 1 से $f'(x)>0$

(1) अन्तराल $(-\infty,-2)\cup(3,\infty)$ में f निरन्तर वर्धमान है।

(2) अन्तराल $(-2,3)$ में f निरन्तर ह्रासमान है।

6. सिद्ध कीजिए कि अन्तराल $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में फलन $f\left(\theta\right)=\frac{4\sin\theta}{2+\cos\theta}-\theta$ वर्धमान फलन है।

हलः $f\left(\theta\right)=\frac{4\sin\theta}{2+\cos\theta}-\theta$

$$\Rightarrow f'\left(\theta\right)=\frac{\left(2+\cos\theta\right).\left(4\cos\theta\right)-4\sin\theta\left(-\sin\theta\right)}{\left(2+\cos\theta\right)^2}-1$$

$$\Rightarrow f'\left(\theta\right)=\frac{8\cos\theta+4\cos^2\theta+4\sin^2\theta}{\left(2+\cos\theta\right)^2}-1$$

$$\Rightarrow f'\left(\theta\right)=\frac{8\cos\theta+4\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)}{\left(2+\cos\theta\right)^2}-1$$

$$\Rightarrow f'\left(\theta\right)=\frac{8\cos\theta+4-\left(2+\cos\theta\right)^2}{\left(2+\cos\theta\right)^2}$$

$$\Rightarrow f'\left(\theta\right)=\frac{8\cos\theta+4-4-4\cos\theta-\cos^2\theta}{\left(2+\cos\theta\right)^2}$$

$$\Rightarrow f'(\theta)=\frac{4\cos\theta-\cos^2\theta}{\left(2+\cos\theta\right)^2}=\frac{\cos\theta\left(4-\cos\theta\right)}{\left(2+\cos\theta\right)^2} \quad ...1$$

अन्तराल

$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में $\cos\theta>0, 4-\cos\theta>0$ तथा $\left(2+\cos\theta\right)^2>0$

तब $\frac{\cos\theta\left(4-\cos\theta\right)}{\left(2+\cos\theta\right)^2}>0$

$\Rightarrow f'\left(\theta\right)>0$

अतः $f\left(\theta\right)$ अन्तराल $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ में वर्धमान है।

7. वक्र $2x^2-y^2=14$ पर सरल रेखा $x+3y=6$ के समान्तर अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हलः माना वक्र $2x^2-y^2=14$ पर बिन्दु $\left(x_1,y_1\right)$ है जहां अभिलम्ब, सरल रेखा $x+3y=6$ के समान्तर है।

$\Rightarrow 2x_1^2-y_1^2=14 \quad ...1$

$\because$ वक्र का समीकरण $2x^2-y^2=14$ का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$4x-2y\frac{dy}{dx}=0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{4x}{2y}=\frac{2x}{y}$

$\Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)_{at\left(x_1,y_1\right)}=\left(\frac{2x_1}{y_1}\right)$

$\because$ बिन्दु $\left(x_1,y_1\right)$ पर अभिलम्ब, रेखा $x+3y=6$ के समान्तर है।

अतः $\left(x_1,y_1\right)$ पर अभिलम्ब की प्रवणता = रेखा $x+3y=6$ की प्रवणता

$\Rightarrow -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{at\left(x_1,y_1\right)}}=-\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{y_1}{2x_1}=\frac{1}{3}\Rightarrow y_1=\frac{2}{3}x_1 \quad ...2$

समीकरण 2 से y_1 का मान समीकरण 1 में रखने पर

$2x_1^2-\left(\frac{2}{3}x_1\right)^2=14$

$\Rightarrow 2x_1^2-\frac{4}{9}x_1^2=14$

$\Rightarrow \frac{14}{9}x_1^2=14\Rightarrow x_1^2=9\Rightarrow x_1=\pm3$

अतः समीकरण 2 से–

जब $x_1=3$ तब $y_1=\frac{2}{3}\times3=2$

तथा $x_1=-3$ तब $y_1=\frac{2}{3}\times\left(-3\right)=-2$

अतः बिन्दु $\left(3,2\right)$ तथा $\left(-3,-2\right)$ पर अभिलम्ब के समीकरण

(i) बिन्दु $\left(3,2\right)$ पर

$y-2=-\frac{1}{3}\left(x-3\right)\Rightarrow x+3y=9$

(ii) बिन्दु $\left(-3,-2\right)$ पर

$y+2=-\frac{1}{3}\left(x+3\right)\Rightarrow x+3y+9=0$

8. वक्र $y=x^2-2x+7$ की स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $2x-y+9=0$ के समान्तर है।

हलः दिया गया वक्र का समीकरण

$y=x^2-2x+7 \quad ...1$

$\therefore \qquad \dfrac{dy}{dx} = 2x - 2 = 2(x-1) \qquad ...2$

रेखा $2x - y + 9 = 0$ की प्रवणता $= 2$

अतः स्पर्शरेखा की प्रवणता $= 2$

अतः समीकरण 2 से

$2(x-1) = 2 \Rightarrow x = 2 \qquad ...3$

समीकरण 1 व 3 से

$y = 2^2 - 2(2) + 7 = 7$

अतः बिन्दु $(1,7)$ परस्पर्श रेखा का समीकरण जो रेखा $2x - y + 9 = 0$ के समान्तर है–

$y - 7 = 2(x-1)$

$\Rightarrow 2x - y + 5 = 0$

9. फलन $\left(\dfrac{1}{x}\right)^x$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।

हलः माना $y = \left(\dfrac{1}{x}\right)^x$

$$\Rightarrow \log_e y = \log_e\left(\frac{1}{x}\right)^x = x\log_e \frac{1}{x} = x\log_e x^{-1} = -x\log_e x$$

माना $\log_e y = z$

अतः $z = \log_e y = -x\log_e x \qquad ...1$

जब y का मान अधिकतम या न्यूनतम होगा तो $\log_e y$ या z का मान भी अधिकतम या न्यूनतम होगा।

समीकरण 1 का x के सापेक्ष अवकलन करने पर–

$\dfrac{dz}{dx} = -x \times \dfrac{1}{x} - \log_e x = -(1 + \log_e x) \qquad ...2$

z अर्थात् y के अधिकतम मान के लिए

$\dfrac{dz}{dx} = 0 \Rightarrow 1 + \log_e x = 0 \Rightarrow \log_e x = -1$

$\Rightarrow x = e^{-1} \qquad ...3$

पुनः समीकरण 1 के दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$\dfrac{d^2z}{dx^2} = -\dfrac{1}{x} \qquad ...4$

समीकरण 3 व 4 से–

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)_{at\,x=\frac{1}{e}} = -\frac{1}{1/e} = -e < 0$$

अतः $x = \dfrac{1}{e}$ पर y का मान अधिकतम होगा और अधिकतम माना $= e^{\frac{1}{e}}$

10. ऐसी दो धनात्मक संख्याएं x तथा y ज्ञात कीजिए जो इस प्रकार हैं कि (a) इनका योग 60 तथा xy^3 अधिकतम है। (b) इनका योग 16 तथा $x^3 + y^3$ न्यूनतम है।

हलः (a) दियाहै $x + y = 60$

$\Rightarrow x = 60 - y \qquad ...1$

माना संख्याओं का अधिकतम $p = xy^3 \qquad ...2$

समीकरण 2 व 1 से–

$p = (60 - y)y^3$

$\Rightarrow p = 60y^3 - y^4$

y के सापेक्ष अवकलन से

$\dfrac{dp}{dy} = 180y^2 - 4y^3$

$\Rightarrow \dfrac{d^2p}{dy^2} = 360y - 12y^2$

p के चरममान के लिए $\dfrac{dp}{dy} = 0$ रखने पर

$180y^2 - 4y^3 = 0$

$\Rightarrow 4y^2(45 - y) = 0$

$\Rightarrow y = 0, y = 45$

यहां x तथा y दोनों धनात्मक है इसलिए $y \neq 0$ अतः $y = 45$

$$\text{अतः} \left(\frac{d^2p}{dy^2}\right)_{at\,y=45} = 360 \times 45 - 12(45)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2p}{dy^2}\right)_{at\,y=45} = 16200 - 24300 = -8100 < 0$$

अतः $y = 45$ पर p मान उच्चतम है।

जब $y = 45$ तब $x = 60 - 45 = 15$

अतः संख्याएं $x = 15$ तथा $y = 45$

(b) माना कि $a = x^3 + y^3 \qquad ...3$

दिया है $x + y = 16$

$\Rightarrow y = 16 - x \qquad ...4$

समीकरण 3 व 4 से–

$q = x^3 + (16 - x)^3$

$$\Rightarrow \frac{dq}{dx} = 3x^2 + 3(16-x)^2(-1) = 3x^2 - 3(256 - 32x + x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{dq}{dx} = 3(32x - 256) \qquad ...5$$

अब $\frac{dq}{dx} = 0 \Rightarrow 32x - 256 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{256}{32} = 8$$

समीकरण 5 का पुनः अवकलन करने पर–

$$\frac{d^2q}{dx^2} = 3 \times 32 = 96 > 0$$

अतः $x = 8$ पर q निम्नतम है। अतः फलन की अभीष्ठ धनात्मक संख्याएं $x = 8, y = 16 - 8 = 8$ है।

11. सिद्ध कीजिए किफलन

$\frac{x}{1 + x\tan x}$ कामान $x = \cos x$ पर उच्चिष्ठ है।

हलः माना $y = \frac{x}{1 + x\tan x}$ ...1

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + x\tan x)\frac{d}{dx}(x) - x\frac{d}{dx}(1 + x\tan x)}{(1 + x\tan x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(1 + x\tan x)(1) - x\left[0 + x\sec^2 x + \tan x\right]}{(1 + x\tan x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2\sec^2 x}{(1 + x\tan x)^2} \qquad ...2$$

उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ के लिए समीकरण 2 में $\frac{dy}{dx} = 0$ रखने पर $\frac{1 - x^2\sec^2 x}{(1 + x\tan x)^2} = 0$

$$\Rightarrow 1 - x^2\sec^2 x = 0$$

$$\Rightarrow 1 = x^2\sec^2 x$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{\sec^2 x} = \cos^2 x$$

$$\Rightarrow x = \pm\cos x \qquad ...3$$

समीकरण 2 का पुनः अवकलन करने पर–

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (1 + x\tan x)^2\left\{-2x\sec^2 x - 2x^2\sec^2 x\tan x\right\}$$
$$\frac{-(1 - x^2\sec^2 x)\left\{2(1 + x\tan x)(\tan x + x\sec^2 x)\right\}}{(1 + x\tan x)^4}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\left[(1 + x\tan x)2x\sec^2 x(1 + x\tan x) + 2(1 - x^2\sec^2 x)(xsec^2x + \tan x)\right]}{(1 + x\tan x)^3}$$

तब $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{at\, x = \cos x} \frac{-\left[(1 + \cos x.\tan x)(2\cos x.\sec^2 x)(1 + \cos x.\tan x) + 0\right]}{(1 + x\tan x)^3}$

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{at\, x = \cos x} = -ve$$

अतः फलन $x = \cos x$ पर उच्चिष्ठ है।

12. सिद्ध कीजिए किफलन

$y = \sin^p\theta\cos^q\theta$ कामान $\tan\theta = \sqrt{\frac{p}{q}}$ पर उच्चिष्ठ है।

हलः दिया है $y = \sin^p\theta.\cos^q\theta$ ...1

दोनों तरफ लघुगणक लेने पर

$$\log_e y = p\log_e \sin\theta + q\log_e \cos\theta \qquad ...2$$

माना $\log_e y = z$ ...3

$$z = \log_e y = p\log_e \sin\theta + q\log_e \cos\theta \qquad ...4$$

समीकरण 4 का θ के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dz}{d\theta} = p\cot\theta - q\tan\theta \qquad ...5$$

उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ के लिए $\frac{dz}{d\theta} = 0$ रखने पर

$$p\cot\theta - q\tan\theta = 0$$

$$\Rightarrow p\cot\theta = q\tan\theta$$

$$\Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{\tan\theta}{\cot\theta} = \tan^2\theta \Rightarrow \tan\theta = \sqrt{\frac{p}{q}}$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\sqrt{\frac{p}{q}} \qquad ...6$$

समीकरण 5 का θ के सापेक्ष पुनः अवकलन करने पर

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} = p\left[-\cos ec^2\theta\right] - q\left[\sec^2\theta\right]$$

$$\Rightarrow \frac{d^2z}{d\theta^2} = -p\left[1 + \cot^2\theta\right] - q\left[1 + \tan^2\theta\right]$$

तब

$$\Rightarrow \left(\frac{d^2z}{d\theta^2}\right)_{at\,\theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)} = -(p + q) - (q + p) = -2(p + q) < 0$$

अतःअभीष्ठ फलन $y = \sin^p\theta\cos^q\theta$ का मान

$\tan\theta = \sqrt{\frac{p}{q}}$ पर उच्चिष्ठ है।

1. फलन $a^{2\log_a x}$ का समाकलन होगा–

(अ) $\frac{x^3}{3}+c$ (ब) $3x^3+c$

(स) $\frac{x^2}{2}+c$ (द) $\frac{x^2}{3}+c$ (अ)

हलः माना कि $I=\int a^{2\log_a x}dx$

$=\int a^{\log_a x^2}dx$

$=\int x^2dx$

$\left\{\because \int a^{\log_a x^2}=x^2\right\}$ $=\frac{x^3}{3}+c$

$\left\{\because \int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c\right\}$

2. $\int a^x da$ का मान होगा–

(अ) $\frac{x^{a+1}}{a+1}+c$ (ब) $\frac{a^{x+1}}{x+1}+c$

(स) xa^{x-1} (द) उपर्युक्त में से कोई नहीं (ब)

हलः माना कि $I=\int a^x da=\frac{a^{x+1}}{x+1}+c$ $\left[\because \int a^n da=\frac{a^{n+1}}{n+1}+c\right]$

3. $\int\left(\sin^{-1}x+\cos^{-1}x\right)dx$ का मान होगा–

(अ) $0+c$ (ब) $\frac{\pi}{2}+c$

(स) $\pi x+c$ (द) $\frac{\pi x}{2}+c$ (द)

हलः माना कि $I=\int\left(\sin^{-1}x+\cos^{-1}x\right)dx$

$\left\{\because \sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}\right\}$ $=\int\frac{\pi}{2}dx$

$\frac{\pi}{2}x+c$

4. $\int\tan^2 x\, dx$ का मान होगा–

(अ) $\tan x+x+c$ (ब) $\sec^2 x-1+c$

(स) $\tan x-x+c$ (द) $-\cot x-x+c$ (स)

हलः $I=\int\tan^2 xdx$ $\{\because \tan^2 x=\sec^2 x-1\}$

$=\int\left(\sec^2 x-1\right)dx=\int\sec^2 xdx-\int 1dx$

$=\tan x-x+c$

5. $\int\log_x x\,dx$ का मान–

(अ) 0 (ब) $1+c$

(स) $x+c$ (द) $-x+c$ (स)

हलः $\int\log_x xdx=\int 1.dx$ $\{\because \log_e e=1\}=x+c$

6. $\int\{xf'(x)+f(x)\}dx$ का समाकलन होगा–

(अ) $xf'(x)+c$ (ब) $f'(x)+c$

(स) $xf(x)+c$ (द) $e^x f(x)$ (स)

हलः $I=\int\{xf'(x)+f(x)\}dx=\int xf'(x)dx+\int f(x)dx$

$=x\int f'(x)dx-\int\left\{\frac{d}{dx}(x)\int f'(x)dx\right\}dx+\int f(x)dx$

$=xf(x)-\int f(x)dx+\int f(x)dx+c$

$=xf(x)+c$

7. $\int\log xdx$ को हल करने पर मान होगा –

(अ) $x\log(ex)+c$ (ब) $x\log x+c$

(स) $x\log\left(\frac{x}{e}\right)+c$ (द) $x\log\left(\frac{e}{x}\right)+c$ (स)

हलः $I=\int\log x.1.dx$

इकाई को द्वितीय फलन मानकर खण्डशः समाकलन करने पर

$=\log x\int 1\,dx-\int\left\{\frac{d}{dx}(\log x)\int 1\,dx\right\}dx$

$=x\log x-\int\frac{1}{x}\times xdx$

$=x\log x-\int 1.dx=x\log x-x+c$

$=x[\log x-1]+c=x\log\left(\frac{x}{e}\right)+c$

8. $\tan^{-1}x$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

(अ) $x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)+c$

(ब) $x\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)+c$

(स) $x\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\log\left(1-x^2\right)+c$

(द) $x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log\left(1-x^2\right)+c$ (अ)

हल: $I=\int \tan^{-1}x.1.dx$

$=\tan^{-1}x\int 1.dx-\int\left\{\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)\int 1.dx\right\}dx$

$=x\tan^{-1}x-\int\frac{1}{1+x^2}\times xdx$

$=x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx$

$=x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)+c$ {जहां $1+x^2=t$ मानने पर}

8. $\int\frac{\sin^p x}{\sin^{p+2}x}dx$ ज्ञात कीजिए।

हल: $I=\int\frac{\sin^p x}{\sin^{p+2}x}dx$

$=\int\frac{\sin^p x}{\cos^p\cos^2 x}dx=\int\tan^p x\sec^2 xdx$

माना कि $\tan x=t\Rightarrow\sec^2 xdx=dt$

$=\int t^p dt=\frac{t^{p+1}}{p+1}+c$

$=\frac{\tan^{p+1}x}{p+1}+c$

9. $\int\frac{1}{\sqrt{5x-6-x^2}}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन ज्ञात कीजिए।

हल: $I=\int\frac{1}{\sqrt{5x-6-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{-6-\left(x^2-5x\right)}}dx$

$=\int\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{25}{4}-6\right)-\left(x^2-5x+\frac{25}{4}\right)}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2}}dx$

$=\sin^{-1}\left\{\frac{x-\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}\right\}+c=\sin^{-1}\left(\frac{2x-5}{1}\right)+c$

$\left\{\because\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\sin^{-1}\frac{x}{a}+c\right\}$

10. $\int\frac{1}{\sqrt{4+8x-5x^2}}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन ज्ञात कीजिए।

हल: $I=\int\frac{1}{\sqrt{-5\left\{x^2-\frac{8}{5}x-\frac{4}{5}\right\}}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{-5\left\{x^2-\frac{8}{5}x-\frac{4}{5}+\frac{16}{25}-\frac{16}{25}\right\}}}$

$=\int\frac{1}{\sqrt{-5\left\{\left(x-\frac{4}{5}\right)^2-\left(\frac{4}{5}+\frac{16}{25}\right)\right\}}}dx$

$=\int\frac{1}{\sqrt{-5\left\{\left(x-\frac{4}{5}\right)^2-\left(\frac{6}{5}\right)^2\right\}}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2-\left(x-\frac{4}{5}\right)^2}}dx$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sin^{-1}\left\{\frac{x-\frac{4}{5}}{\frac{6}{5}}\right\}+c=\frac{1}{\sqrt{5}}\sin^{-1}\left\{\frac{5x-4}{6}\right\}+c$

$\left\{\because\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\sin^{-1}\frac{x}{a}+c\right\}$

11. $\int\sqrt{\frac{a-x}{x}}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन ज्ञात कीजिए।

हल: $I=\int\sqrt{\frac{a-x}{x}}dx$

$x=a\sin^2\theta$ रखने पर

$dx=2a\sin\theta\cos\theta d\theta$

$I=\int\sqrt{\frac{a-a\sin^2\theta}{a\sin^2\theta}}\times 2a\sin\theta\cos\theta\,d\theta$

$=\int\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\times 2a\sin\theta\cos\theta\,d\theta=\int 2a\cos^2\theta\,d\theta$

$=a\int\left(1+\cos 2\theta\right)d\theta=a\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]+c$

$=a\left[\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}+\sin\theta\cos\theta\right]+c$

$=a\left[\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{x}{a}}\sqrt{1-\frac{x}{a}}\right]+c$

$=a\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{x}\sqrt{a-x}+c$

12. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3-x^3}}dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः माना $I=\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a^3-x^3}}dx$

माना $t=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}$

$\therefore \frac{dt}{dx}=\frac{3\sqrt{x}}{2a^{\frac{3}{2}}}$

$I=\frac{2}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\frac{2}{3}\sin^{-1}t+c=\frac{2}{3}\sin^{-1}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{3}{2}}}\right)+c$

13. $\int \frac{1}{x\left(x^n-1\right)}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हलः $I=\int \frac{1}{x\left(x^n-1\right)}dx$

$=\int \frac{x^{n-1}}{x^n\left(x^n-1\right)}dx$

{x^{n-1} का अंश व हर से गुणा करने पर

$x^n=t$ रखने पर $nx^{n-1}dx=dt \Rightarrow x^{n-1}dx=\frac{1}{n}dt$

$I=\frac{1}{n}\int \frac{dt}{t(t-1)}=\frac{1}{n}\int\left[\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right]dt=\frac{1}{n}\left[\log(t-1)-\log t\right]+c$

$I=\frac{1}{n}\log\left(\frac{t-1}{t}\right)+c$

$=\frac{1}{n}\log\left(\frac{x^n-1}{x^n}\right)+c$

इसी प्रकार से

$\int \frac{1}{x\left(x^5+1\right)}dx, \int \frac{1}{x\left(a+bx^n\right)}dx$ को सरल किया जा सकता है।

14. $\int \frac{1}{\left(e^x-1\right)^2}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन ज्ञात कीजिए।

हलः $I=\int \frac{dx}{\left(e^x-1\right)^2}$

माना कि $e^x=t \Rightarrow e^x dx=dt$

$\Rightarrow dx=\frac{1}{t}dt$

$I=\int \frac{1}{t\left(t-1\right)^2}dt$

$I=\int \frac{1}{t\left(t-1\right)^2}dt$

$\frac{1}{t\left(t-1\right)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{(t-1)}+\frac{C}{(t-1)^2}$

$=\frac{A\left(t-1\right)^2+Bt\left(t-1\right)+ct}{t\left(t-1\right)^2}$

$1=A\left(t^2-2t+1\right)+B\left(t^2-t\right)+ct$

दोनों पक्षों के गुणांकों की तुलना करने पर

$A+B=0 \Rightarrow A=-B$

$A=1 \qquad \Rightarrow B=-1$

$-2A-B+C=0 \Rightarrow C=2A+B=2.1-1=1$

$I=\int \frac{1}{t\left(t-1\right)^2}dt=\int \frac{1}{t}dt-\int \frac{dt}{t-1}+\int \frac{dt}{\left(t-1\right)^2}$

$=\log|t|-\log|t-1|-\frac{1}{t-1}+c$

$=\log|e^x|-\log|e^x-1|-\frac{1}{\left(e^x-1\right)}+c$

$I=\log\left|\frac{e^x}{e^x-1}\right|-\frac{1}{\left(e^x-1\right)}+c$

15. $\int \frac{x^2+5x+3}{x^2+3x+2}dx$

हलः $\int \frac{x^2+5x+3}{x^2+3x+2}dx$

$\frac{x^2+5x+3}{x^2+3x+2}=1+\frac{2x+1}{x^2+3x+2}$

$=1+\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)}$

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+2)}$$

$$2x+1=A(x+2)+B(x+1)$$

तुलना करने पर

$$A+B=2\Rightarrow B=2-A$$

$$2A+B=1$$

$$\Rightarrow A=-1\Rightarrow A=-1$$

$$\therefore B=2-(-1)=3$$

$$\therefore \frac{2x+1}{(x+1)(x+2)}=\frac{-1}{(x+1)}+\frac{3}{(x+2)}$$

$$\therefore \int\frac{x^2+5x+3}{x^2+3x+2}dx=\int 1.dx+\int\frac{-1}{(x+1)}dx+\int\frac{3}{(x+2)}dx$$

$$=x-\log|x+1|+3\log|x+2|+c$$

16. $\int\sqrt{\sec x-1}\,dx$ को हल कीजिए।

हल: माना कि $I=\int\sqrt{\sec x-1}\,dx=\int\sqrt{\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}dx=\int\sqrt{\frac{1-\cos x}{\cos x}}dx$

$$=\int\sqrt{\frac{1-\cos x}{\cos x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}}dx=\int\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x+\cos x}}dx$$

$$=\int\frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x+\cos x}}dx$$

मानाकि $\cos x=t \qquad \therefore \sin x dx=-dt$

$$I=\int-\frac{dt}{\sqrt{t^2+t}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=-\log\left|\left(t+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right|+c$$

$$=-\log\left|\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\cos^2 x+\cos x}\right|+c$$

17. $\int(\log x)^2\,dx$ का हल कीजिए।

हल: $I=\int 1.(\log x)^2\,dx$

खण्डशः समाकलन करने पर

$$=(\log x)^2\int 1.dx-\int\left\{\frac{d}{dx}(\log x)^2\int 1.dx\right\}dx$$

$$=x(\log x)^2-2\int 1.\log x dx$$

$$=x(\log x)^2-2\left[\log x\int 1.dx-\int\left\{\frac{d}{dx}(\log x)\int 1.dx\right\}\right]dx$$

$$=x(\log x)^2-2x\log x+2\int\frac{1}{x}.xdx$$

$$=x(\log x)^2-2x\log x+2x+c$$

18. $\int\sqrt{1+\sin 2x}dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $I=\int\sqrt{1+\sin 2x}dx=\int\sqrt{\left(\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x\right)}dx$

$$=\int(\sin x+\cos x)dx=-\cos x+\sin x+c$$

19. $\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx$ का मान ज्ञात करो।

हल: $I=\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx=\int\frac{\sin x+1-1}{1+\sin x}dx$

$$=\int 1.dx-\int\frac{1}{1+\sin x}dx \qquad =\int 1.dx-\int\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx$$

$$=\int 1.dx-\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int\tan x\sec x\,dx$$

20. $\sin(\log x)$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: $I=\int\sin(\log x)dx$

$$\log x=t\Rightarrow x=e^t$$

$$dx=e^t dt$$

$$I=\int\sin t\times e^t dt=\int e^t\sin t\,dt$$

$$=\frac{e^t}{2}[\sin t-\cos t]+c=\frac{x}{2}[\sin\log x-\cos\log x]+c$$

21. $\frac{xe^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

हल: $I=\int\frac{xe^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$\sin^{-1}x=t\Rightarrow x=\sin t\Rightarrow dx=\cos t\,dt$$

$$=\int\frac{e^t\sin t}{\cos t}\times\cos t dt=\int e^t\sin t dt$$

$$=\frac{e^t}{2}[\sin t-\cos t]+c \qquad =\frac{e^{\sin^{-1}x}}{2}\left[x-\sqrt{1-x^2}\right]+c$$

22. $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$ का मान ज्ञात करो।

हल: $I=\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\left[\cos ec^2 x-\sec^2 x\right]dx$

$$=-\cot x-\tan x+c$$

1. $\int_{-1}^{1} e^{|x|}dx$ का मान होगा–

(अ) $2e-2$ (ब) $2-2e$

(स) $2+2e$ (द) e^2-2 (अ)

हलः $\int_{-1}^{1} e^{|x|}dx = \int_{-1}^{0} e^{|x|}dx + \int_{0}^{1} e^{|x|}dx$

$= \int_{-1}^{0} e^{-x}dx + \int_{0}^{1} e^{x}dx$

$= \left[-e^{-x}\right]_{-1}^{0} + \left[e^{x}\right]_{0}^{1}$

$= \left[-e^{0}+e^{1}\right] + \left[e-e^{0}\right] = 2e-2$

2. $= \int_{0}^{\pi} |\cos x|\,dx = \int_{0}^{\pi/2} |\cos x|\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} |\cos x|\,dx$

(अ) 2 (ब)–2

(स) $\frac{1}{2}$ (द)उपर्युक्त में से कोई नहीं (अ)

हलः $= \int_{0}^{\pi/2} \cos x dx + \int_{\pi/2}^{\pi} -\cos x dx$

$= [\sin x]_{0}^{\pi/2} - [\sin x]_{\pi/2}^{\pi}$

$= \left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right] - \left[\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right]$

$= (1-0)-(0-1) = 2$

3. $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{3x-2}$ का मान होगा–

(अ) $\frac{1}{3}\log\frac{4}{5}$ (ब) $3\log\frac{4}{5}$

(स) $\frac{1}{3}\log\frac{5}{4}$ (द) $3\log\frac{5}{4}$ (अ)

हलः $I = \int_{-1}^{2} \frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3}\left[\log(3x-2)\right]_{-1}^{2}$

$= \frac{1}{3}\left[\log|6-2| - \log|-3-2|\right]$

$= \frac{1}{3}\left[\log 4 - \log 5\right]$

$= \frac{1}{3}\log\frac{4}{5}$

4. $\int_{0}^{1} \frac{2x}{1+x^4}dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः $I = \int_{0}^{1} \frac{2x}{1+x^4}dx$

माना कि $x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt$

जब $x=0$ तब $t=0$

जब $x=1$ तब $t=1$

$I = \int_{0}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = \left[\tan^{-1} t\right]_{0}^{1}$

$= \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0)$

5. $\int_{4/\pi}^{2/\pi} \left(-\frac{1}{x^3}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx$ को हल कीजिए।

हलः $I = \int_{4/\pi}^{2/\pi} \left(-\frac{1}{x^3}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx$

माना $\frac{1}{x} = t$ जब $x = \frac{4}{\pi}$ तब $t = \frac{\pi}{4}$

$-\frac{1}{x^2}dx = dt$ $\quad x = \frac{2}{\pi}$ तब $t = \frac{\pi}{2}$

$\therefore I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} t\cos t dt$

$t\int \cos t dt - \int\left\{\frac{d}{dt}(t)\int \cos t dt\right\}dt$

$= [t\sin t + \cos t]_{\pi/4}^{\pi/2} = \left[\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$= \left(\frac{\pi}{2}+0\right) - \left(\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

6. $I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}, \beta > \alpha$ को हल कीजिए।

हल: $I=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$

माना $x-\alpha=t^2$

$dx=2tdt$

जब $x=\alpha$ तब $t=0$

$x=\beta$ तब $t=\sqrt{\beta-\alpha}$

$$I=\int_{0}^{\sqrt{\beta-\alpha}}\frac{2t}{\sqrt{t^2\left\{\beta-\left(\alpha+t^2\right)\right\}}}dt$$

$$=2\int_{0}^{\sqrt{\beta-\alpha}}\frac{dt}{\sqrt{(\beta-\alpha)-t^2}}$$

$$=2\left[\sin^{-1}\frac{t}{\sqrt{\beta-\alpha}}\right]_0^{\sqrt{\beta-\alpha}}$$

$$=2\left[\sin^{-1}(1)-\sin^{-1}(0)\right]$$

$$=\pi$$

7. $\int_{0}^{\pi/4}\frac{\sin x+\cos x}{9+16\sin 2x}dx$

हल: $I=\int_{0}^{\pi/4}\frac{\sin x+\cos x}{9+16\sin 2x}dx$

$\because(\sin x-\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x$

$(\sin x-\cos x)^2=1-\sin 2x$

$\sin 2x=1-(\sin x-\cos x)^2$

$$I=\int_{0}^{\pi/4}\frac{\sin x+\cos x}{9+16\left[1-(\sin x-\cos x)^2\right]}dx$$

$$=\int_{0}^{\pi/4}\frac{\sin x+\cos x}{25-16(\sin x-\cos x)^2}dx$$

$$=\frac{1}{16}\int_{0}^{\pi/4}\frac{\sin x+\cos x}{\frac{25}{16}-(\sin x-\cos x)^2}dx$$

$$=\frac{1}{16}\int_{0}^{\pi/4}\frac{\sin x+\cos x}{\left(\frac{5}{4}\right)^2-(\sin x-\cos x)^2}dx$$

माना $\sin x-\cos x=t$ जब $x=0$ तब $t=-1$

जब $x=\frac{\pi}{4}$ तब $t=0$

$(\cos x+\sin x)dx=dt$

$$=\frac{1}{16}\int_{-1}^{0}\frac{dt}{\left(\frac{5}{4}\right)^2-t^2}$$

$$\because\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$$

$$=\frac{1}{16}\left[\frac{1}{2\times\frac{5}{4}}\log\left|\frac{\frac{5}{4}+t}{\frac{5}{4}-t}\right|\right]_{-1}^{0}$$

$$=\frac{1}{40}\left[\log\frac{5+4t}{5-4t}\right]_{-1}^{0}$$

$$=\frac{1}{40}\left[\log(1)-\log\frac{1}{9}\right]$$

$$=\frac{1}{40}\log 3^2=\frac{2}{40}\log|3|+c$$

$$=\frac{1}{20}\log|3|+c$$

8. $\int_{e}^{e^2}\left[\frac{1}{\log x}-\frac{1}{(\log x)^2}\right]dx$ को हल कीजिए।

हल: माना $\log x=t\ \therefore x=e^t$

$\frac{1}{x}dx=dt$ जब $x=e$ तब $t=1$

$x=e^2$ तब $t=2$

$$I=\int_{1}^{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}\right)e^t dt$$

$$\because\left\{\int e^x f(x)+f'(x)\right\}dx=e^x f(x)+c$$

$$I=\left[e^t.\frac{1}{t}\right]_1^2=\frac{e^2}{2}-e$$

9. $\int_{0}^{3}\sqrt{\frac{x}{3-x}}dx$ को हल कीजिए।

हलः $I=\int_0^3 \sqrt{\frac{x}{3-x}}dx$

$x=3\sin^2\theta$

$dx=3\times 2\sin\theta\cos\theta d\theta$

जब $x=0$ तब $\theta=0$

$x=3$ तब $\theta=\frac{\pi}{2}$

$$I=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{3\sin^2\theta}{3-3\sin^2\theta}}\times 6\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times 6\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$=6\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta$$

$$=6\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=3\left[\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2}$$

$$=3\left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin 2\times\frac{\pi}{2}-(0)\right]$$

$$=3\left[\frac{\pi}{2}\right]=\frac{3\pi}{2}$$

10. $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^5\cos^2 xdx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः $I=\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^5\cos^2 xdx$

$\because f(x)=x^5\cos^2 x$

$f(-x)=(-x)^5\cos^2(-x)$

$=-x^5\cos^2 x=-f(x)$

यहां पर $f(-x)=-f(x)$

दिया गया फलन विषम है अतः P_7 से

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^5\cos^2 xdx=0$$

11. $\int_0^1 \log\left(\frac{1}{x}-1\right)dx$ को सरल कीजिए।

हलः $I=\int_0^1 \log\left(\frac{1}{x}-1\right)dx=\int_0^1\log\left(\frac{1-x}{x}\right)dx$ ...1

P_4 से–

$$=\int_0^1\log\left(\frac{1-1+x}{1-x}\right)dx$$

$$=\int_0^1\log\left(\frac{x}{1-x}\right)dx \quad ...2$$

समीकरण 1 व 2 को जोड़ने पर

$$2I=\int_0^1\left\{\log\left(\frac{1-x}{x}\right)+\log\left(\frac{x}{1-x}\right)\right\}dx$$

$$2I=\int_0^1\log\left(\frac{1-x}{x}\times\frac{x}{1-x}\right)dx=\int_0^1\log 1\,dx=0$$

$2I=0\Rightarrow I=0$

12. $\int_0^{\pi/2}\log\sin 2xdx$ को हल कीजिए।

हलः माना कि $I=\int_0^{\pi/2}\log\sin 2xdx$

$2x=t\Rightarrow 2dx=dt$

$dx=\frac{1}{2}dt$

जब $x=0$ तब $t=0$

$x=\frac{\pi}{2}$ तब $t=\pi$

अतः $I=\int_0^{\pi}\log\sin t.\frac{1}{2}dt$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\log\sin tdt$$

P_1 से

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\log\sin xdx$$

P_7 से $\log\sin(\pi-x)=\log\sin x$

$$I=\frac{1}{2}\times 2\int_0^{\pi/2}\log\sin xdx$$

$$I=\int_0^{\pi/2}\log\sin x dx$$

$$I=\frac{-\pi}{2}\log 2$$

$$I=\frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$$

13. $\int_0^{\pi}\log\left(1-\cos x\right)dx$ को हल कीजिए।

हलः $I=\int_0^{\pi}\log\left(1-\cos x\right)dx$ ...1

P_5 से

$$I=\int_0^{\pi}\log\left[1-\cos(\pi-x)\right]dx$$

$$=\int_0^{\pi}\log(1+\cos x)dx \qquad ...2$$

समीकरण 1 + 2

$$2I=\int_0^{\pi}\log(1-\cos x)dx+\int_0^{\pi}\log(1+\cos x)dx$$

$$=\int_0^{\pi}\log\left\{(1-\cos x)(1+\cos x)\right\}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\log(1-\cos^2 x)dx=\int_0^{\pi}\log\sin^2 xdx$$

$$2I=2\int_0^{\pi}\log\sin xdx$$

$$I=\int_0^{\pi}\log\sin xdx$$

$$f(x)=\log\sin x$$

$$f(\pi-x)=\log\sin(\pi-x)=\log\sin x$$

P_7 से

$$I=2\int_0^{\pi/2}\log\sin xdx$$

$$\because\int_0^{\pi/2}\log\sin xdx=\frac{-\pi}{2}\log 2$$

$$I=2\left(\frac{-\pi}{2}\log 2\right)=-\pi\log 2$$

$$=\pi\log\frac{1}{2}$$

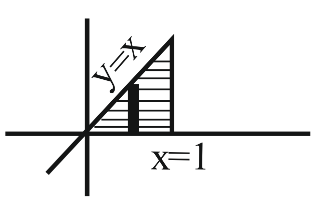
इकाई–10 : क्षेत्रकलन

1. वक्र $y=x, x=1$ तथा x अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है–

(अ) $\frac{1}{2}$ वर्ग इकाई (ब) 2 वर्ग इकाई

(स) $\frac{3}{2}$ वर्ग इकाई (द) 3 वर्ग इकाई (अ)

हलः क्षेत्रफल $=\int_0^{1}ydx$



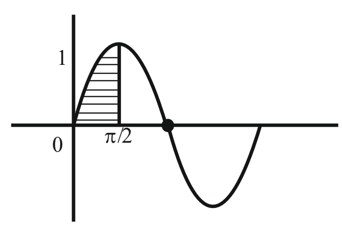
$$=\int_0^{1}xdx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}\text{ वर्गइकाई}$$

2. वक्र $y=\sin x$ के नीचे $x=0$ से $x=\frac{\pi}{2}$ तकका क्षेत्रफलहै–

(अ) π (ब) $\frac{1}{2}$

(स) 1 (द) 2 (स)

हलः $=\int_0^{\pi/2}ydx=\int_0^{\pi/2}\sin xdx=\left[-\cos x\right]_0^{\pi/2}$



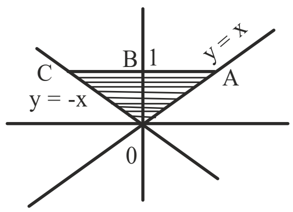
$$=\left[-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0\right]$$

$$=\left[-(0)+1\right]=1\text{ वर्ग इकाई}$$

3. वक्र $y=|x|$ तथा रेखा $y=1$ से परिबद्ध क्षेत्रफल–
(अ) 4 (ब) 2
(स) 1 (द) इनमें से कोई नहीं (स)

हलः अभिष्ट क्षेत्रफल $=2\times$ क्षे. $OABO$

$$=2\times\int_0^1 xdy$$



$$=2\int_0^1 ydy=2\times\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1$$

$=1$ वर्गइकाई

4. x अक्ष वक्र $y=\sin^3 x\cos x$ तथा कोटियों $x=0$ तथा $x=\frac{\pi}{2}$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्र फल ज्ञात कीजिए।

हलः x अक्ष के साथ परिबद्ध अभिष्ट क्षेत्रफल

$$=\int_a^b ydx$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sin^3 x\cos xdx$$

$$\sin x=t\Rightarrow\cos xdx=dt$$

जब $x=0$ तब $t=0$

जब $x=\frac{\pi}{2}$ तब $t=1$

$$=\int_0^1 t^3dt$$

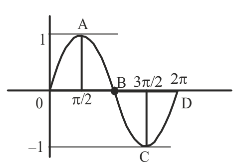
$$=\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}\text{ वर्गइकाई}$$

5. वक्र $y=\sin x$ तथा x–अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्र फल ज्ञात कीजिए जबकि $0\le x\le 2\pi$ ।

हलः अभिष्ट क्षे. $=$ क्षे. $OABO$ का क्षे. + क्षे. $BCDB$ का क्षे.

$$=\int_0^{2\pi}|\sin x|dx$$

$$=\int_0^{\pi}|\sin x|dx+\int_{\pi}^{2\pi}|\sin x|dx$$



$$=\int_0^{\pi}\sin xdx-\int_{\pi}^{2\pi}\sin xdx$$

$$=\left[-\cos x\right]_0^{\pi}-\left[-\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$=\left[-\cos\pi+\cos 0\right]+\left[\cos 2\pi-\cos\pi\right]$$

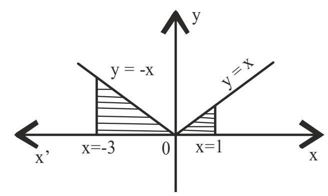
$$=(1+1)+(1+1)=4\text{ वर्गइकाई}$$

6. $y=|x|, x=-3, x=1$ व x अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हलः $y=|x|=\begin{cases}x & x>0\\ -x & x<0\end{cases}$

वक्र x अक्ष एवं $x=-3$ तथा $x=1$ के मध्य परिबद्ध अभिष्ट क्षे.

$$\int_{-3}^{0}ydx+\int_0^1 ydx$$



$$=\int_{-3}^{0}(-x)dx+\int_0^1 xdx$$

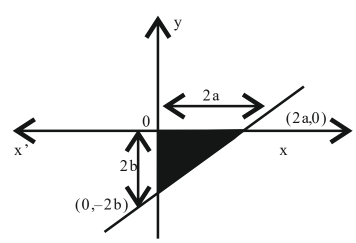
$$=-\left[0-\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$=\left[(0)-\left(\frac{9}{2}\right)\right]+\left[\frac{1}{2}-0\right]$$

$$=\frac{9}{2}+\frac{1}{2}=\frac{10}{2}=5\text{ वर्ग इकाई}$$

7. निर्देशी अक्षों व रेखा $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2$ से परिबद्ध क्षे. का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हलः $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2$ ...1



$$\Rightarrow\frac{x}{a}-2=\frac{y}{b}\qquad\Rightarrow y=\frac{b}{a}(x-2a)$$

$$\Rightarrow\frac{x}{2a}+\frac{y}{2b}=1$$

x अक्ष पर काटा गया अन्तःखण्ड $2a$ व y अक्ष पर काटा गया अन्तःखण्ड $-2b$

क्षेत्रफल $= \int_0^{2a} y_{line} dx$

$= \int_0^{2a} \frac{b}{a}(x-2a)\,dx$ {समीकरण 1 से y का मान रखने पर}

$= \frac{b}{a}\left[\frac{x^2}{2} - 2ax\right]_0^{2a}$

$= \frac{b}{a}\left[\frac{4a^2}{2} - 4a^2\right]$

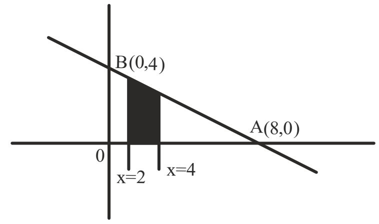
$= \frac{b}{a}\left[\frac{4a^2}{2}\right] = +2ab$ वर्ग इकाई

8. रेखाओं $x+2y=8, x=2, x=4$ तथा x अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हलः दी गई रेखाओं का समीकरण

$x+2y=8 \qquad \Rightarrow y = \frac{8-x}{2}$

$\frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$



छायांकित भाग का क्षेत्रफल

$= \int_2^4 y dx$

$= \frac{1}{2}\left[8x - \frac{x^2}{2}\right]_2^4$

$= \frac{1}{2}\left[(32-8)-(16-2)\right]$

$= \frac{1}{2}\left[24-14\right] = \frac{10}{2} = 5$ वर्ग इकाई

इकाई—11 : अवकल समीकरण

1. अवकल समीकरण $e^x dy + \left(ye^x + 2x\right)dx = 0$ का व्यापक हल है–

(अ) $xe^y + x^2 = c$ (ब) $xe^y + y^2 = c$

(स) $ye^y + x^2 = c$ (द) $ye^x + x^2 = c$ (द)

हलः $e^x dy + (ye^x + 2x)dx = 0$

$\Rightarrow e^x dy = -\left(ye^x + 2x\right)dx$

$\Rightarrow e^x \frac{dy}{dx} = -\left(ye^x + 2x\right)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-ye^x}{e^x} - \frac{2x}{e^x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + y = -\frac{2x}{e^x}$

$I.F. = e^{\int 1.dx} = e^x$

$\therefore$ हल $ye^x = \int e^x \times \left(\frac{-2x}{e^x}\right)dx$

$ye^x = \int -2x dx$

$ye^x = -x^2 + c$

$\Rightarrow ye^x + x^2 = c$

2. अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx} - y = 2x^2$ का समाकलन गुणक है–

(अ) e^{-x} (ब) e^{-y}

(स) $\frac{1}{x}$ (द) x (स)

हलः $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{2x^2}{x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + y\left(-\frac{1}{x}\right) = 2x$

$I.f = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\log x} = \frac{1}{x}$

3. निम्न में से कौनसा समघात अवकल समीकरण है–

(अ) $\left(4x+6y+5\right)dy - \left(3y+2x+4\right)dx = 0$

(ब) $\left(xy\right)dy - \left(x^3+y^3\right)dx = 0$

(स) $\left(x^3+2y^2\right)dx + 2xydy = 0$

(द) $y^2dx + \left(x^2 - xy - y^2\right)dy = 0$ (द)

4. $\frac{dx}{dy}=f\left(\frac{x}{y}\right)$ रुप वाले समघात अवकल समीकरण को हल करने के लिए निम्न में से कौनसा प्रतिस्थापन किया जाता है–

(अ) $y=vx$ (ब) $v=yx$

(स) $x=vy$ (द) $x=v$ (स)

5. समीकरण $\frac{dy}{dx}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ का हल है–

(अ) $y=\log\left(e^x+e^{-x}\right)+c$

(ब) $y=\log\left(e^x-e^{-x}\right)+c$

(स) $y=\log\left(e^x+1\right)+c$

(द) $y=\log\left(1-e^{-x}\right)+c$ (ब)

6. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}+\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{2/3}=0$ की घात व कोटि लिखो।

(अ) $2,2$ (ब) $2,3$

(स) $3,2$ (द) इनमें से कोई नहीं (स)

हलः $\frac{d^2y}{dx^2}=-\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{2/3}$

$\Rightarrow\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3=-\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}^2$

अधिकतम कोटि $=2$

घात $=3$

7. अवकल समीकरण की कोटि व घात सदैव होते है।

(अ) पूर्णांक (ब) धनात्मक पूर्णांक

(स)प्राकृत संख्या (द)वास्तविक संख्या (ब)

8. हल कीजिए $\frac{dy}{dx}=\frac{x(2\log x+1)}{\sin y+y\cos y}$

हलः चरों के पृथक्करण से

$(\sin y+y\cos y)dy=x(2\log x+1)dx$

$\Rightarrow\sin ydy+y\cos ydy=2x\log xdx+xdx$

दोनों तरफ समाकलन करने पर

$\int\sin ydy+\int y\cos ydy=\int 2x\log xdx+\int xdx$

$\Rightarrow-\cos y+\left[y\int\cos ydy-\int\left\{\frac{d(y)}{dy}\int\cos ydy\right\}dy\right]$

$=2\left[\log x\int x.dx-\int\left\{\frac{d}{dx}(\log x)\int xdx\right\}dx\right]+\frac{x^2}{2}$

$\Rightarrow-\cos y+\left[y\sin y+\cos y\right]=2\left[\frac{x^2}{2}\log x-\frac{1}{2}\times\frac{x^2}{2}\right]+\frac{x^2}{2}+c$

$\Rightarrow y\sin y=x^2\log x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+c$

$\Rightarrow y\sin y=x^2\log x+c$

9. निम्न अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\left\{\log\left(\frac{y}{x}\right)+1\right\}$

हलः दी गयी अवकल समीकरण

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\left\{\log\left(\frac{y}{x}\right)+1\right\}$ समघातहै।

$\because y=vx$ रखने पर

$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$

$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{vx}{x}\left\{\log\left(\frac{vx}{x}\right)+1\right\}$

$v+x\frac{dv}{dx}=v(\log v+1)$

$\Rightarrow v+x\frac{dv}{dx}=v\log v+v$

$\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=v\log v$

$\Rightarrow\frac{1}{v\log v}dv=\frac{dx}{x}$

दोनों तरफ समाकलन करने पर

$\int\frac{1}{v\log v}dv=\int\frac{dx}{x}$

माना $\log v=t$

$\frac{1}{v}dv=dt$

$\int\frac{1}{t}dt=\int\frac{dx}{x}$

$\Rightarrow\log t=\log x+\log c$

$\Rightarrow\log t=\log cx$

$\Rightarrow t=cx$

$\Rightarrow\log v=cx$

$$\Rightarrow v = e^{cx}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = e^{cx} \Rightarrow y = x.e^{cx}$$

10. $\sin^{-1}\left[\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y\right]=x$

हल: $\sin^{-1}\left[\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y\right]=x$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=\sin x$$

$$I.F. = e^{\int pdx} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\log x} = x^2$$

$$y.x^2 = \int x^2 \sin x dx$$

$$= x^2\int \sin x dx - \int\left\{\frac{d(x^2)}{dx}\int \sin x dx\right\}dx$$

$$= -x^2\cos x - \int -2x\cos x dx$$

$$= -x^2\cos x + 2\left[x\int\cos x dx - \int\left\{\frac{d(x)}{dx}\int \cos x dx\right\}dx\right]$$

$$= -x^2\cos x + 2\left[x\sin x + \cos x\right] + c$$

$$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$$

11. $\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}+2xy = x\sqrt{1-x^2}$ को हल कीजिए।

हल: $\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}+2xy = x\sqrt{1-x^2}$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2x}{1-x^2}y = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\left(1-x^2\right)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$I.F. = e^{\int\frac{2x}{1-x^2}dx} = e^{-\log\left(1-x^2\right)} = \frac{1}{\left(1-x^2\right)}$$

$\therefore$ हल $y(I.F.) = \int (I.F.)Q(x)dx$

$$y.\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = \int\frac{1}{\left(1-x^2\right)}.\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$1-x^2 = t$ तब $-2xdx = dt \Rightarrow xdx = -\frac{1}{2}dt$

$$y\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = \frac{-1}{2}\int\frac{1}{t^{3/2}}dt = \frac{-1}{2}\frac{t^{-3/2+1}}{\frac{-3}{2}+1}+c$$

$$= \frac{-1}{2}\frac{t^{-1/2}}{\frac{-1}{2}}+c$$

$$y\left(\frac{1}{1-x^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{t}}+c = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+c$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{1-x^2}+c\left(1-x^2\right)$$

इकाई–12 : सदिश

1. सदिश $\vec{a} = \hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ के अनुदिश एक मात्रक (इकाई) सदिश होगा ?

(अ) $\frac{1}{2}\left(\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}\right)$ (ब) $\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}\right)$

(स) $\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}\right)$ (द) इनमें से कोई नहीं (ब)

हल: $|\vec{a}| = \sqrt{\left(1^2+1^2+2^2\right)} = \sqrt{\left(1+1+4\right)} = \sqrt{6}$

सदिश $\vec{a}$ के अनुदिश मात्रक सदिश

$$\left(\hat{a}\right) = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}\right)$$

2. λ के किस मान के लिए सदिश $2\hat{i}+\lambda\hat{j}+5\hat{k}$ और $-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ परस्पर लम्बवत् है ?

(अ) –3 (ब) 3

(स) 7 (द) –7 (अ)

हल: दिये गये सदिश लम्बवत् होंगे यदि इनका अदिश गुणनफल शून्य हो, अर्थात् $\vec{a}.\vec{b} = 0$

$\left(2\hat{i}+\lambda\hat{j}+5\hat{k}\right).\left(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right) = 0$ या

$$(2)(-1)+(\lambda)(1)+(5)(1) = 0$$

या $-2+\lambda+5 = 0$

या $\lambda+3 = 0$

या $\lambda = -3$

3. यदि $|\vec{a}| = 10, |\vec{b}| = 2$ तथा $\vec{a}.\vec{b} = 12$ हो, तो $|\vec{a}\times\vec{b}|$ का मान होगा ?

(अ) 8 (ब) 4

(स) 16 (द) 24 (स)

हल: दो सदिशों का अदिश गुणनफल की परिभाषा से

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$$12 = 10 \times 2 \times \cos\theta$$

या $\cos\theta = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

तब $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

$$= 10 \times 2 \times \frac{4}{5} = 16$$

4. दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के परिमाण क्रमशः $\sqrt{3}$ एक 2 है और $\vec{a}.\vec{b} = \sqrt{6}$ है तो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण होगा ?

(अ) 30^o (ब) 60^o

(स) 90^o (द) 45^o (द)

हलः दिये सदिशों $\vec{a}$ व $\vec{b}$ के मध्य कोण θ माना है।

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}\times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^o$$

$$\Rightarrow \theta = 45^o$$

5. यदि एक मात्रक सदिश $\vec{a}$ के लिए $(\vec{x}-\vec{a}).(\vec{x}+\vec{a}) = 12$ हो, तो $|\vec{x}|$ का मान ज्ञात कीजिए;

हलः दिया है सदिश $\vec{a}$ एक मात्रक सदिश है तो

$$|\vec{a}| = 1$$

$$(\vec{x}-\vec{a}).(\vec{x}+\vec{a}) = 12$$

$$\Rightarrow \vec{x}.\vec{x} + \vec{x}.\vec{a} - \vec{a}.\vec{x} - \vec{a}.\vec{a} = 12$$

$$\{\because \vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}\}$$

$$\Rightarrow |\vec{x}|^2 + \vec{a}.\vec{x} - \vec{a}.\vec{x} - |\vec{a}|^2 = 12$$

$$\Rightarrow |\vec{x}|^2 - (1)^2 = 12$$

$$\Rightarrow |\vec{x}|^2 = 1 + 12$$

$$\Rightarrow |\vec{x}|^2 = 13$$

$$\Rightarrow |\vec{x}| = \sqrt{13}$$

अतः $|\vec{x}|$ का मान $\sqrt{13}$ हैं।

6. सदिशों $4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $-2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ के लम्बवत् 9 इकाई परिमाण वाला सदिश ज्ञात कीजिए।

हलः दिये सदिश $\vec{a} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k},\ \vec{b} = -2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

सदिशों $\vec{a}$ व $\vec{b}$ के लम्बवत् सदिश $= \vec{a}\times\vec{b}$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(2-3) - \hat{j}(-8+6) + \hat{k}(4-2)$$

$$= -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$$

सदिशों $\vec{a}$ व $\vec{b}$ के लम्बवत् इकाई सदिश $(\hat{n}) = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$

$$= \frac{(-\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})}{3}$$

सदिशों $\vec{a}$ व $\vec{b}$ के लम्बवत् 9 इकाई परिमाण वाला सदिश

$$= \frac{9(\vec{a}\times\vec{b})}{|\vec{a}\times\vec{b}|} = \frac{9(-\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})}{3}$$

$$3(-\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

7. सिद्ध कीजिए कि $(\vec{a}.\vec{b})^2 \le |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$

हलः माना सदिश $\vec{a}$ व $\vec{b}$ के मध्य कोण θ हैं तब दो सदिशों के अदिश गुणन की परिभाषा से

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}\times\vec{b}|\cos\theta$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$(\vec{a}.\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos^2\theta \quad ...1$$

हम जानते है कि

$-1 \le \cos\theta \le 1$ या $0 \le \cos^2\theta \le 1$ या $\cos^2\theta \le 1$ दोनों पक्षों को $|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$ से गुणा करने पर

$|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\cos\theta \le |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$ समीकरण 1 से

$(\vec{a}.\vec{b})^2 \le |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$ इति सिद्धम

8. बिन्दुओं $P(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$ और $Q(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ को मिलाने वाली रेखा को 2 : 1 के अनुपात में (i) अन्तः (ii) बाह्य विभाजित करने वाले बिन्दु R का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए।

हलः (i) P और Q को मिलाने वाली रेखा को 2 : 1 के अनुपात में अन्तः विभाजित करने वाले बिन्दु R का स्थिति सदिश है –

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2(\overrightarrow{OQ}) + (1)(\overrightarrow{OP})}{2+1}$$

$$= \frac{2(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) + (1)(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})}{3}$$

$$=\frac{-2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}+\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}}{3}$$

$$=\frac{-\hat{i}+4\hat{j}+\hat{k}}{3}$$

(ii) P और Q को मिलाने वाली रेखा को 2 : 1 के अनुदिश में बाह्य विभाजित करने वाले बिन्दु R का स्थिति सदिश

$$\overrightarrow{OR}=\frac{2\left(\overrightarrow{OQ}\right)-(1)\left(\overrightarrow{OP}\right)}{2-1}$$

$$=\frac{2(-\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})-(1)(\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})}{2-1}$$

$$=-2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}-\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$$

$$=-3\hat{i}+3\hat{k}$$

9. यदि दो इकाई सदिशों $\hat{a}$ तथा $\hat{b}$ के मध्य का कोण θ हो, तब सिद्ध कीजिए कि

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2}|\hat{a}-\hat{b}|$$

हलः दिये दो इकाई सदिशों $\hat{a}$ तथा $\hat{b}$ के मध्य का कोण θ हैं।

$$|\hat{a}-\hat{b}|^2=\left(\hat{a}-\hat{b}\right).\left(\hat{a}-\hat{b}\right)$$

$$=\hat{a}.\hat{a}-\hat{a}.\hat{b}-\hat{b}.\hat{a}+\hat{b}.\hat{b}$$

$$=|\hat{a}|^2-\hat{a}.\hat{b}-\hat{a}.\hat{b}+|\hat{b}|^2$$

$$\left\{\because \hat{a}.\hat{b}=\hat{b}.\hat{a}\right\}$$

$$=(1)^2-2(\hat{a}.\hat{b})+(1)^2$$

$$=1-2|\hat{a}||\hat{b}|\cos\theta+1$$

$$=2-2(1)(1)\cos\theta$$

$$=2(1-\cos\theta)$$

$$=2(2\sin^2\theta/2)$$

$$=\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow|\hat{a}-\hat{b}|=2\sin\frac{\theta}{2}$$

या $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}|(\hat{a}-\hat{b})|$ इति सिद्धम

10. यदि $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ तो सिद्ध कीजिए कि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ परस्पर लम्ब सदिश है।

हलः दिये सदिश $\vec{a}$ व $\vec{b}$ है।

$$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$$

वर्ग करने पर

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2$$

$$(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})=(\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}-\vec{b})$$

$$\vec{a}\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}=\vec{a}.\vec{a}-\vec{a}.\vec{b}-\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}$$

$$\Rightarrow|\vec{a}|^2+\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-\vec{a}.\vec{b}-\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

$$\{\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}\}$$

$$\Rightarrow 2(\vec{a}.\vec{b})=-2(\vec{a}.\vec{b})$$

$$\Rightarrow 2(\vec{a}.\vec{b})+2(\vec{a}.\vec{b})=0$$

$$\Rightarrow 4(\vec{a}.\vec{b})=0$$

$$\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=0$$

अतः सदिश $\vec{a}$ व $\vec{b}$ परस्पर लम्ब है।

11. यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ समान परिमाण के परस्पर लम्ब सदिश हो, तो सिद्ध कीजिए कि सदिश $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ सदिशों $\vec{a},\vec{b}$ और $\vec{c}$ के साथ बराबर कोण बनाता है।

हलः सदिश $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ परस्पर लम्ब है।

अतः $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{c}=\vec{c}.\vec{a}=0$

पुनः सदिशों $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ के परिमाण बराबर है।

अतः $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|$

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

$$=\vec{a}.\vec{a}+\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}+\vec{c}.\vec{b}+\vec{c}.\vec{c}$$

$=|\vec{a}|^2+|\vec{a}|^2+|\vec{a}|^2 \quad \{|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|\}$ तथा

$$\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{c}=\vec{c}.\vec{a}=0$$

$$=3|\vec{a}|^2$$

$$\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{3}|\vec{a}|$$

$$\because(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).\vec{a}=\vec{a}.\vec{a}+\vec{b}.\vec{a}+\vec{c}.\vec{a}$$

$$=|\vec{a}|^2+0+0$$

$$=|\vec{a}|^2$$

माना $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ तथा $\vec{a}$ के मध्य कोण θ_1 है।

अतः $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}).\vec{a}=|(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})||\vec{a}|\cos\theta_1$

$$\Rightarrow|\vec{a}|^2=\left(\sqrt{3}|\vec{a}|\right)\left(|\vec{a}|\right)\cos\theta_1$$

$$\Rightarrow\cos\theta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow\theta_1=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

इसी प्रकार यदि सदिश $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ सदिश $\vec{b}$ व $\vec{c}$ के साथ क्रमशः θ_1 व θ_2 कोण बनाता है तो $\theta_2=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ तथा

$$\theta_3=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

12. किसी सदिश $\vec{a}$ के लिए सिद्ध कीजिए कि

$$|\vec{a}\times\hat{i}|^2+|\vec{a}\times\hat{j}|^2+|\vec{a}\times\hat{k}|^2=2|\vec{a}|^2$$

हलः माना कि सदिश $\vec{a}=\vec{a}_1\hat{i}+\vec{a}_2\hat{j}+\vec{a}_3\hat{k}$

$$\vec{a}\times\hat{i}=(\vec{a}_1\hat{i}+\vec{a}_2\hat{j}+\vec{a}_3\hat{k})\times\hat{i}$$

$$=a_1(\hat{i}\times\hat{i})+a_2(\hat{j}\times\hat{i})+a_3(\hat{k}\times\hat{i})$$

$$=0+a_2(-\hat{k})+a_3(\hat{j})$$

$$\vec{a}\times\hat{i}=a_3\hat{j}-a_2\hat{k}$$

$$|\vec{a}\times\hat{i}|^2=(a_3)^2+(-a_2)^2=a_2^2+a_3^2 \quad ...1$$

इसी प्रकार $|\vec{a}\times\hat{j}|^2=a_1^2+a_3^2$ ...2

$$|\vec{a}\times\hat{k}|^2=a_1^2+a_2^2 \quad ...3$$

समीकरण 1, 2, व 3 को जोड़ने पर

$$|\vec{a}\times\hat{i}|^2+|\vec{a}\times\hat{j}|^2+|\vec{a}\times\hat{k}|^2=a_2^2+a_3^2+a_1^2+a_3^2+a_1^2+a_2^2$$

$$=2\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)$$

$=2|\vec{a}|^2$ इति सिद्धम

13. यदि $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k},\vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ और $\vec{c}=3\hat{i}+3\hat{j}$ इस प्रकार है कि $\vec{a}+\lambda\vec{b},\vec{c}$ पर लम्ब है तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः दिये सदिश

$$\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k},\vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k},\vec{c}=3\hat{i}+3\hat{j}$$

$$\vec{a}+\lambda\vec{b}=(2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})+\lambda(-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})$$

$$=(2-\lambda)\hat{i}+(2+2\lambda)\hat{j}+(3+\lambda)\hat{k}$$

$\because\left(\vec{a}+\lambda\vec{b}\right)$ व $\vec{c}$ परस्पर लम्ब है तो

$$\left(\vec{a}+\lambda\vec{b}\right).\vec{c}=0$$

$$\left\{(2-\lambda)\hat{i}+(2+2\lambda)\hat{j}+(3+\lambda)\hat{k}\right\}.\left(3\hat{i}+3\hat{j}\right)=0$$

$$\Rightarrow 6-3\lambda+6+6\lambda=0$$

$$\Rightarrow 12+3\lambda=0$$

$$\Rightarrow \lambda=-\frac{12}{3}=-4$$

अतः λ का मान -4 है।

इकाई–13: त्रि–विमीय ज्यामिति

1. निम्नमेंसेकौनसासमुह एकरेखा की दिक् कोज्याएॅनहींहै।

(अ) 1,1,1 (ब) 0,0,–1

(स) –1,0,0 (द) 0,–1,0

हल : (अ)

$\because$ दिक् कोज्याओं के वर्गो का योग सदैव इकाई होता है।

2. बिन्दु p समष्टि में इस प्रकार है कि $op=6$ तथा $\overrightarrow{op}$, ox तथा oy अक्षों के साथ क्रमशः 45 डिग्री व 60 डिग्री के कोण बनाता है तो p का स्थिति सदिश होगा।

(अ) $3\hat{i}+3\hat{j}\pm3\sqrt{2}\hat{k}$

(ब) $6\hat{i}+6\sqrt{2}\hat{j}\pm6\hat{k}$

(स) $3\sqrt{2}\hat{i}+3\hat{j}\pm3\hat{k}$

(द) $3\hat{i}+3\sqrt{2}\hat{j}\pm3\hat{k}$

हल : (स)

$$\because \cos^2 45^o+\cos^2 60^o+\cos^2 r=1$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cos^2 r=1$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cos^2 r=1$$

$$\Rightarrow\frac{3}{4}+\cos^2 r=1$$

$$\Rightarrow\cos^2 r=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\cos r=\pm\frac{1}{2}$$

P का स्थिति सदिश $=op\,(l\hat{i}+m\hat{j}+r\hat{k})$

$$=6\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i}+\frac{1}{2}\hat{j}\pm\frac{1}{2}\hat{k}\right)=3\sqrt{2}\hat{i}+3\hat{j}\pm3\hat{k}$$

3. सदिश 3**i** की दिक् को ज्याऐं होगी

(अ)3,0,0 (ब) 1,0,0

(स) –1,0,0 (द) –3,0,0

हल : (ब)

4. एक रेखाखण्ड का अक्षों पर प्रक्षेप –3,4, – 12 है। रेखा की लम्बाई तथा दिक् को ज्याऐं ज्ञात कीजिए।

हलः माना कि रेखा की दिक् को ज्याऐं l, m, nतथा रेखा की लम्बाई l है।

रेखा का x अक्ष पर प्रक्षेप = - 3 $\{x=lr$

$\Rightarrow lr = -3$ 1

इसीप्रकार $mr = 4$
.....2

$nr = -12$ 3

$(1)^2 + (2)^2 + (3)^2 \Rightarrow l^2r^2 + m^2r^2 + n^2r^2 = (-3)^2 + (4)^2 + (-12)^2$

$\Rightarrow (l^2 + m^2 + n^2)r^2 = 9 + 16 + 144$

$\Rightarrow r^2 = 169 \Rightarrow r = 13$

सभी (1), (2) व (3) से $l = \frac{-3}{13}, m = \frac{4}{13}, n = \frac{-12}{13}$

अतः रेखा की लम्बाई 13 इकाई व दिक् को ज्याऍ $\frac{-3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{-12}{13}\}$

5. दो बिन्दुओं (4,2,3) तथा (4,5,7) को मिलाने पर सरल रेखा की दिक् को ज्याऍ ज्ञात कीजिए।

हलः (4,2,3) तथा (4,5,7) को मिलाने वाली रेखा के दिक् अनुपात है।

4–4, 5–2, 7–3 अर्थात 0, 3, 4

$\sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

अतः दिक् को ज्याऍ $0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$ है।

6. बिन्दु (1,2,3) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सदिश$(3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$ के समान्तर हैं।

हलः रेखाबिन्दु (1,2,3) से गुजरती है जिसका स्थिति सदिश$\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ तथासदिश$\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ के समान्तर है तो रेखा का सदिश समीकरण

$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$

$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$

7. एक रेखा का कार्तीय समीकरण $3x + 1 = 6y - 2 = 1 - z$ है। वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जहॉ से यह गुजरती हैं साथ ही इसके दिक् अनुपात तथा सदिश समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

हलः रेखा का समीकरण

$3x + 1 = 6y - 2 = 1 - z$

या $\dfrac{\frac{3x+1}{3}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{6y-2}{6}}{\frac{1}{6}} = \dfrac{z-1}{-1}$

या $\dfrac{x + \frac{1}{3}}{2} = \dfrac{y - \frac{1}{3}}{1} = \dfrac{z-1}{-6}$

दी गई रेखा के दिक् अनुपात 2, 1, –6 हैं तथा रेखा बिन्दु $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$ से गुजरती हैं तथा रेखा का सदिश समीकरण

$\vec{r} = \left(-\frac{1}{3}\hat{i} + \frac{1}{3}\hat{j} + \hat{k}\right) + \lambda(2\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k})$ है।

8. दिखाइए कि रेखाऍ

$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ और $\frac{x-4}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ परस्पर प्रतिच्छेदी है। उनका प्रतिच्छेद बिन्दु ज्ञात कीजिए।

हलः रेखा$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} = r_1$ (माना) पर किसी बिन्दु के निर्देशांक $(2r_1 + 1, 3r_1 + 2, 4r_1 + 3)$ है।

इसी प्रकार रेखा $\frac{x-4}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1} = r_2$ (माना) पर किसी बिन्दु के निर्देशांक$(5r_2 + 4, 2r_2 + 1, r_2)$ हैं।

ये रेखाऍ परस्पर प्रतिच्छेद करेगी, यदि दोनों रेखाओं पर एक बिन्दु उभयनिष्ट हो, जिसके लिए निम्न समीकरण संन्तुष्ट होने चाहिए। अर्थात्

$2r_1 + 1 = 5r_2 + 4 \Rightarrow 2r_1 - 5r_2 - 3 = 0$
....1

$3r_1 + 2 = 2r_2 + 1 \Rightarrow 3r_1 - 2r_2 + 1 = 0$
....2

$4r_1 + 3 = r_2 \Rightarrow 4r_1 - r_2 + 3 = 0$ 3

समीकरण (1) व (2) से

$\frac{r_1}{-5-6} = \frac{r_2}{-9-2} = \frac{1}{-4+15}$ या $\frac{r_1}{-11} = \frac{r_2}{-11} = \frac{1}{11}$

$\Rightarrow r_1 = -1, r_2 = -1$

समीकरण (3) से $4(-1) - (-1) + 3 = 0$

$\Rightarrow -4 + 1 + 3 = 0$

$\Rightarrow 0 = 0$

r_1 व r_2 के मानसमीकरण (3) को सन्तुष्ट करते है।अतः दोनों रेखाऍ परस्पर प्रतिच्छेद करती है तथा प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशाक $\{2(-1) + 1, 3(-1) + 2, 4(-1) + 3\} = (-1, -1, -1)$ हैं।

9. बिन्दु (2,3,4) से रेखा $\frac{4-x}{2} = \frac{y}{6} = \frac{1-z}{3}$ पर डाले गये लम्ब का पाद ज्ञात कीजिए । साथ ही दिए गए बिन्दु से रेखा की लम्बवत् दुरी भी ज्ञात कीजिए।

हलः माना बिन्दु $p(2,3,4)$ से दी गई रेखा पर डाले गए लम्ब का पाद L है।

रेखा$\frac{4-x}{2} = \frac{y}{6} = \frac{1-z}{3}$ पर व्यापक बिन्दु के निर्देशांक

$\frac{x-4}{-2} = \frac{y}{6} = \frac{z-1}{-3} = \lambda$ 1

(माना) से प्राप्त करने पर L के निर्देशांक $(-2\lambda+4, 6\lambda, -3\lambda+1)$ है।

$\because PL$ के दिक् अनपात $-2\lambda+4-2, 6\lambda-3, -3\lambda+1-4$

अर्थात $-2\lambda+2, 6\lambda-3, -3\lambda-3$

दी गई रेखा के दिक् अनुपात –2,6,–3 हैं चूंकि PL दी गई रेखा पर लम्ब है अत :

$$-2(-2\lambda+2)+6(6\lambda-3)-3(-3\lambda-3)=0$$

या $4\lambda-4+36\lambda-18+9\lambda+9=0$

या $49\lambda=13$ या $\lambda=\frac{13}{49}$

समीकरण (1) में $\lambda=\frac{13}{49}$ रखने पर L के निर्देशांक

$$\left(-2\times\frac{13}{49}+4, 6\times\frac{13}{49}, -3\times\frac{13}{49}+1\right)$$

$=\left(\frac{170}{49}, \frac{78}{49}, \frac{10}{49}\right)$ हैं। यह लम्ब का पाद है, बिन्दु से रेखा की लम्बवत दुरी

$$PL=\sqrt{\left(\frac{170}{49}-2\right)^2+\left(\frac{78}{49}-3\right)^2+\left(\frac{10}{49}-4\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{(72)^2+(-69)^2+(-186)^2}{49^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{5184+4761+34596}{49^2}}=\frac{1}{49}\sqrt{44541}$$

$$=\frac{1}{49}\sqrt{101\times 441}=\frac{21}{49}\sqrt{101}=\frac{3}{7}\sqrt{(101)}\text{ Ans.}$$

10. रेखाओं $\vec{r}=\left(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}\right)+\lambda\left(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)$ और $\vec{r}=\left(2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}\right)+\mu\left(2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}\right)$ के मध्य की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

हलः $\vec{r}=\vec{a}_1+\lambda\vec{b}_1$ और $\vec{r}=\vec{a}_2+\mu\vec{b}_2$ हम देखते है :

$\vec{a}_1=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}, \vec{b}_1=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$

$\vec{a}_2=2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}, \vec{b}_2=2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$

$\because \vec{a}_2-\vec{a}_1=(2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k})-(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$

$=(\hat{i}-3\hat{j}-4\hat{k})$ और

$$\vec{b}_1\times\vec{b}_2=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

$=\hat{i}(-2-1)+\hat{j}(2-2)+\hat{k}(1+2)$

$=-3\hat{i}+3\hat{k}$

$\vec{b}_1\times\vec{b}_2=\sqrt{(-3)^2+(3)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

न्यूनतम दूरी $=\frac{|(\vec{a}_1-\vec{a}_2).(\vec{b}_1\times\vec{b}_2)|}{|\vec{b}_1\times\vec{b}_2|}$

$$=\frac{|(\hat{i}-3\hat{j}-4\hat{k}).(-3\hat{i}+3\hat{k})|}{3\sqrt{2}}$$

$$=\frac{|(1)(-3)+(-4)(3)|}{3\sqrt{2}}$$

$=\frac{15}{3\sqrt{2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$ इकाई

इकाई–14 : प्रायिकता

1. यदि A और B स्वतंत्र घंटनाएं है जहां $P(A)=0.3, P(B)=0.6$ तब $P(A\cap B)$ बराबर होगा–

(अ) $\frac{1}{2}$ (ब) 2

(स) 1.8 (द) 0.18 (द)

हलः A व B स्वतंत्र घटनाएं है अत :

$$P\left(A\cap B\right)=P(A)\times P(B)=0.3\times 0.6=0.18$$

2. दो घटनाएं A तथा B परस्पर स्वतंत्र कहलाती हैं यदि

(अ) $P(A)=P(B)$ (ब) $P(A)+P(B)=1$

(स) $P(\overline{AB})=\left[1-P(A)\right]\left[1-P(B)\right]$

(द) A व B परस्पर अपवजी है (स)

3. यदि $P(A)=\frac{6}{11}, P(B)=\frac{5}{11}$ और $P(A\cup B)=\frac{7}{11}$ हो तो ज्ञात कीजिए।

$(i) A\cap B$ (ii) $P\left(A/B\right)$ (iii) $P(B/A)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{6}{11}+\frac{5}{11}-\frac{7}{11}=\frac{4}{11}$$

4. यदि $2P(A)=P(B)=\frac{5}{13}$ और $P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{2}{5}$ हो तो $P\left(A\cup B\right)$ ज्ञात कीजिए।

हल: $2P(A)=\frac{5}{13}\Rightarrow P(A)=\frac{5}{26}\;;P(B)=\frac{5}{13}$

हम जानते है $P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=P\left(\frac{A}{B}\right).P(B)=\frac{2}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{2}{13}$$

तथा $\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$=\frac{5}{26}+\frac{5}{13}-\frac{2}{13}=\frac{5+10-4}{26}=\frac{11}{26}$$

5. यदि एक पासे को तीन बार उछाला जाये तो कम से कम एक बार विषम संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: सम संख्या 2, 4, 6 एक पासे पर 3 तरीकों से आ सकती है।

$\therefore$ सम संख्या आने की प्रायिकता $=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

तीनों पासों पर सम संख्या आने की प्रायिकता $=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

तीनों पासों को उछालने पर कम से कम एक विषम संख्या प्राप्त होने की प्रायिकता

$$=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

6. एक विशेष समस्या को A व B द्वारा स्वतंत्र रूप से हल करने की प्रायिकताएं क्रमशः $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ है यदि दोनों स्वतंत्र रूप से समस्या हल करने का प्रयास करते हैं, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि (i) समस्या हल हो जाती है। (ii) उनमें से तथ्यतः कोई एक समस्या हल कर लेता है।

हल: A व B द्वारा समस्या हल करने की प्रायिकता क्रमशः $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ है तथा A व B द्वारा समस्या हल नहीं करने की प्रायिकता क्रमशः $\left(1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\right)$ तथा $\left(1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\right)$ है।

(i) समस्या हल न होने की प्रायिकता $=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

अतः समस्या हल होने की प्रायिकता $=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

(ii) यदि समस्या हल होने को y तथा हल नहीं होने को N से निरूपित करे तो तथ्यतः कोई एक समस्या हल कर लेता है इसकी प्रायिकता $= yN+Ny$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

7. एक सिक्के को इस प्रकार अभिनत किया गया है कि सिक्के पर चित आने की संभावना पट आने की अपेक्षा तीन गुणा है। यदि सिक्के को दो बार उछाला हो तो पटों की संख्या के लिए प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

हल: माना सिक्के की एक उछाल में पट प्राप्त करने की प्रायिकता p है तब चित आने की प्रायिकता $3p$ होगी।

सिक्के की एक उछाल में चित प्राप्त करना तथा पट प्राप्त करना परस्पर अपवर्जी तथा निश्शेष घटनाएं है अतः

$$P(H)+P(T)=1$$

$$\Rightarrow 3p+p=1$$

$$\Rightarrow p=\frac{1}{4}$$

अतः $P(H)=\frac{3}{4}$ तथा $P(T)=\frac{1}{4}$

माना सिक्के की दो उछालों में पटों की संख्या को X से निरूपित करते है। तब $X=0,1$ और 2 मान ग्रहण करता है।

$$P(X=0)=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$$

$$P(X=1)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

$$P(X=2)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

अतः X का प्रायिकता बंटन

X	0	1	2
$P(X)$	$9/16$	$3/8$	$1/16$

8. एक छात्रावास में 60 प्रतिशत विद्यार्थी हिन्दी का 40 प्रतिशत अंग्रेजी का और 20 प्रतिशत दोनों अखबार पढ़ते है। एक छात्रा को याद च्छया चुना जाता है।

(i) प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह न तो हिन्दी और न ही अंग्रेजी का अखबार पढ़ती है।

(ii) यदि वह हिन्दी का अखबार पढ़ती है तो उसके अंग्रेजी का अखबार भी पढ़ने वाली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(iii) यदि वह अंग्रेजी का अखबार पढ़ती है तो उसके हिन्दी का अखबार भी पढ़ने वाली होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल: प्रश्नानुसार

$$P(H)=60\%=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}=0.6$$

$$P(E)=40\%=\frac{40}{100}=\frac{4}{10}=0.4$$

$$P(H \cap E) = 20\% = \frac{20}{100} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0.2$$

(i) $P(H \cup E) = P(H) + P(E) - P(H \cap E) = 0.6 + 0.4 - 0.2 = 0.8$

अतः न तो अंग्रेजी और न ही हिन्दी अखबार पढ़ने की प्रायिकता

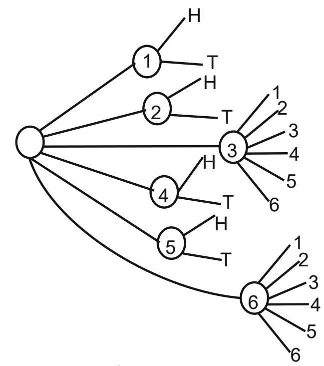
$$= 1 - P(H \cup E) = 1 - 0.8 = 0.2 = \frac{1}{5}$$

(ii) $P\left(\frac{E}{H}\right) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}$

(iii) $P\left(\frac{H}{E}\right) = \frac{P(E \cap H)}{P(E)} = \frac{0.2}{0.4} = \frac{1}{2}$

8. एक पासे को उछालने के परीक्षण पर विचार कीजिए यदि पासे पर प्राप्त अंक 3 या 3 का गुणज हो, तो पासे को पुनः उछाला जाता है तथा यदि प्राप्त अंक 3 या 3 का गुणज के अतिरिक्त हो तो एक सिक्के को उछाला जाता है। यदि घटना 'कम से कम एक पासे पर 3 प्रकट होना' का घटित होना दिया गया है तो घटना 'सिक्कों पर पट आना' की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हलः



माना A घटना 'सिक्कों पर पट आना' तथा B घटना 'कम से कम एक पासे पर 3 प्रकट होना' को निरूपित करते है।

तब $A = \{(1,T),(2,T),(4,T),(5,T)\}$

$B = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(6,3)\}$

अतः $n(A) = 4, n(B) = 7, n(A \cap B) = \varphi$

अभीष्ट प्रायिकता $= P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{0}{7} = 0$

उच्च माध्यमिक परीक्षा मॉडल प्रश्न–पत्र 2021 (प्रथम)
गणित

समय : $3\frac{1}{4}$ घण्टे | पूर्णांक : 80

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश :–

1. सभी प्रश्न करने अनिवार्य है।
2. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर पुस्तिका में लिखे।
3. जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड है उन सभी के उत्तर एक साथ ही लिखे।
4. प्रश्न का उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखे।
5. प्रश्नों का अंक भार निम्नानुसार है।

खण्ड	प्रश्नों की संख्या	कुल अंक भार	अंक प्रत्येक प्रश्न
खण्ड–अ	1(i-x) (2 से 11)= 20	20	1
खण्ड–ब	(12 से 19)	16	2
खण्ड–स	(20से23)	16	4
खण्ड–द	(24से25)	10	5
खण्ड–य	(26से28)	18	6

6. प्रश्न संख्या 20 से 28 में आन्तरिक विकल्प दिये गये है।

1. (i) यदि $\cot^{-1}(x)+\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{2}$ तो x का मान है –

(अ) 1 (ब) $\frac{1}{3}$ (स) $\frac{2}{3}$ (द)इनमें से कोई नहीं

(ii) आव्यूह A का क्रम 5×8 है तथा R, A की पंक्ति आव्यूह है तो आव्यूह R का क्रम होगा?

(अ) 1×8 (ब) 5×1 (स) 8×1 (द) 1×5

(iii) K के किसमान के लिए सारणिक $\begin{vmatrix} K & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$ कामान शून्य होगा ?

(अ) -3 (ब) -2 (स) $-\frac{8}{3}$ (द) $\frac{8}{3}$

(iv) यदि A व B एक ही क्रम के व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह है तो $(AB)^{-1}$ का मान होगा ?

(अ) $A^{-1}B^{-1}$ (ब) $B^{-1}A^{-1}$ (स) $B^{-1}A$ (द) AB

(v) फलन $y=\log_e \log_e x^2$ का x के सापेक्ष अवकलन होगा ?

(अ) $\frac{2}{x\log x^2}$ (ब) $\frac{1}{x\log x^2}$ (स) $\frac{2}{\log x^2}$ (द) $\frac{2x}{\log x^2}$

(vi) वक्र $y=x^3-x$ बिन्दु $x=2$ पर अभिलम्ब की प्रवणता होगी ?

(अ) $-\frac{1}{6}$ (ब) $-\frac{1}{9}$ (स) $-\frac{1}{11}$ (द) $-\frac{1}{13}$

(vii) $\int a^{3\log_a x}dx$ बराबर है–

(अ) $\frac{x^3}{3}+c$ (ब) $\frac{x^4}{4}+c$ (स) $3x^2+c$ (द) x^3+c

$(viii)$ अवकल समीकरण $a\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}$ की कोटि तथा घात क्रमशः होगी ?

(अ) 2,3 (ब) 3,2 (स) 2,2 (द) 2,1

(ix) शून्य सदिश की दिशा होगी ?

(अ) कोई नहीं होती (ब) एक विशेष बिन्दु की ओर होती है।
(स) मूल बिन्दु की ओर होती है। (द) अनिर्धारित होती है।

(x) यदि $P(A)=0.8$ और $P\left(\dfrac{B}{A}\right)=0.4$ हो, तो $P\left(A\bigcap B\right)$ का मान होगा ?

(अ) 0.2 (ब) 0.32 (स) 0.5 (द) 0.64

2. एक 3×3 क्रम का आव्यूह $B=\left[b_{ij}\right]$ लिखिए जिनके अवयव $b_{ij}=(i)(j)$ हैं।

3. सारणिक $\begin{vmatrix}3 & 7\\ -11 & -9\end{vmatrix}$ में अवयव 3 का सह–खण्ड अवयव लिखिए।

4. त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जबकि त्रिभुज के शीर्ष $A(2,3), B(-5,4)$ तथा $C(4,3)$ हैं।

5. फलन $y=\log\left(\dfrac{x}{a^x}\right)$ का x के सापेक्ष अवकलन करने पर $\dfrac{dy}{dx}$ का मान लिखिए।

6. $\int \log_x x dx$ का मान लिखिए।

7. वक्र $y=\cos x$ तथा x अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल लिखिए, जबकि $\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi$

8. समान परिमाण वाले दो विभिन्न सदिश लिखिए।

9. यदि एक रेखा x, y और z अक्ष के साथ क्रमशः $90^o, 135^o$ तथा 45^o के कोण बनाती है तो इस रेखा के दिक्–कोसाइन का मान लिखिए।

10. अवकल समीकरण $\dfrac{dy}{dx}=\cos x+x$ को हल करने पर $y=\ldots\ldots$ होगा ?

11. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}=$

खण्ड–ब

12. $\sec^2\left(\tan^{-1}2\right)+\cos ec^2\left(\cot^{-1}3\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

13. यदि $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & -2\end{bmatrix}$ तथा $A^2=KA-2I_2$, हो तो K का मान ज्ञात कीजिए।

14. यदि $\begin{vmatrix}2 & 3\\ y & x\end{vmatrix}=4$ तथा $\begin{vmatrix}x & y\\ 4 & 2\end{vmatrix}=7$ हो, तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए।

15. फलन $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x} & ;x\ne0\\ 0 & ;x=0\end{cases}$ की $x=0$ पर संततता का परीक्षण कीजिए।

16. $\displaystyle\int\frac{\sin^p x}{\cos^{p+2}x}dx$ ज्ञात कीजिए।

17. अवकल समीकरण $\left(e^{y}+1\right)\cos x dx+e^{y}\sin x dy=0$ को हल कीजिए।

18. बिन्दुओं $(-1,0,2)$ और $(3,4,6)$ से होकर जाने वाली रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

19. यदि A और B स्वतंत्र घटनाएं है जहां $P(A)=0.3$, $P(B)=0.6$ तब ज्ञात कीजिए।

$(i)\ P\left(A\cap \bar{B}\right)$ $(ii)\ P\left(A\cup B\right)$

खण्ड स

20. निम्न समीकरण को हल कीजिए

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{a-1}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{a^{2}-x+1}\right)$$

या

यदि $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^{2}}\right)+\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-y^{2}}{1+y^{2}}\right)+\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{3z-z^{3}}{1-3z^{2}}\right)=5\pi$ सिद्ध कीजिए कि $x+y+z=xyz$

21. वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें फलन $f(x)=\sin x-\cos x$ वर्धमान या ह्रासमान हो जबकि $x\in\left(0,\pi\right)$

या

वक्र $y=x^{2}-2x+7$ की स्पर्श रेखा का समीरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $5y-15x=13$ के लम्बवत है।

22. दर्शाइए कि बिन्दु A,B और C जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $\vec{a}=3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k},\vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ और $\vec{c}=\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ है, एक समकोण त्रिभुज के शीर्षों का निर्माण करते है।

या

यदि $A(1,2,2),B(2,-1,1)$ तथा $C(-1,-2,3)$ समतल में कोई तीन बिन्दु हो, तोसमतल ABC के अभिलम्ब की दिशा में एक सदिश ज्ञात कीजिए जिसका परिमाण 5 इकाई हो।

23. वृत $x^{2}+y^{2}=a^{2}$ एवं रेखा $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$ से घिरे छोटे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

या

$y=|x|,x=-3,x=1$ व x अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्र फल ज्ञात कीजिए।

24. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}2 & 2 & -4\\ -4 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 5\end{bmatrix}$ होतो AB ज्ञात कीजिए तथा इसकी सहायता से निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए $x-y=3;2x+3y+4z=17;y+2z=7$

या

यदि $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & \frac{1+bc}{a}\end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए तथा दर्शाइए कि $aA^{-1}=\left(a^{2}+bc+1\right)I-aA$

25. पासों के एक जोड़े को तीन बार उछालने पर द्विकों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

या

एक काले तथा एक लाल पासे को क्रम में उछाला जाता है। तब (i) पासों पर प्राप्त अकों का योग 9 से अधिक होने की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए, यदि यह ज्ञात है कि काले पासे पर अंक 5 प्रकट हुआ है।(ii) पासों पर प्राप्त अंकों का योग 8 होने की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए, यदि यह ज्ञात है कि लाल पासे पर प्रकट अंक 4 से कम है।

खण्ड य

26. सिद्ध कीजिए $-\int_0^{\pi} \frac{xdx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi^2}{2ab}$

या

$\int e^x \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 dx$ का मान ज्ञात कीजिए

या

सिद्ध कीजिए कि फलन $\frac{x}{1+x\tan x}$ का मान $x = \cos x$ पर उच्चिष्ठ है।

27. यदि $y = \left(\sin^{-1} x\right)^2$ तब सिद्ध कीजिए कि $\left(1-x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 2 = 0$

या

$\frac{x+\sin x}{1+\cos x}$ का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

या

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)\left(x^2+b^2\right)} = \frac{\pi}{2ab\left(a+b\right)}$$

28. बिन्दु $\left(2,3,2\right)$ से जाने वाली रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $\vec{r} = \left(-2\hat{i}+3\hat{j}\right)+\mu\left(2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k}\right)$ के समान्तर है इन रेखाओं के मध्य की दूरी भी ज्ञात कीजिए।

या

दो रेखाओं की दिक् को ज्याएं निम्न सम्बंधों द्वारा दी गई है, उन्हे ज्ञात कीजिए

$$l - 5m + 3n = 0 \text{ या } 7l^2 + 5m^2 - 3n^2 = 0$$

या

रेखाओं $\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-3}$ तथा $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{2}$ के मध्य की लघुतम दूरी ज्ञात कीजिए।

उच्च माध्यमिक परीक्षा मॉडल प्रश्न–पत्र 2021 (द्वितीय)
गणित

समय : $3\frac{1}{4}$ घण्टे पूर्णांक : 80

परीक्षार्थियों के लिए सामान्य निर्देश :–

1. सभी प्रश्न करने अनिवार्य है।
2. प्रत्येक प्रश्न का उत्तर दी गई उत्तर पुस्तिका में लिखे।
3. जिन प्रश्नों में आन्तरिक खण्ड है उन सभी के उत्तर एक साथ ही लिखे।
4. प्रश्न का उत्तर लिखने से पूर्व प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखे।
5. प्रश्नों का अंकभार निम्नानुसार है।

खण्ड	प्रश्नों की संख्या	कुल अंक भार	अंक प्रत्येक प्रश्न
खण्ड–अ	1(i-x) (2 से 11)= 20	20	1
खण्ड–ब	(12 से 19) = 8	16	2
खण्ड–स	(20 से 23) = 4	16	4
खण्ड–द	(24 से 25) = 2	10	5
खण्ड–य	(26 से 28) = 3	18	6

6. प्रश्न संख्या 20 से 28 में आन्तरिक विकल्प दिये गये है।

1. (i) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+2\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ का मान है–

(अ) $\frac{\pi}{2}$ (ब) $\frac{\pi}{3}$ (स) $\frac{2\pi}{3}$ (द) π

(ii) 6 अवयवों वाले आव्यूह के सम्भावित क्रमों की संख्या होगी ?

(अ) 2 (ब) 4 (स) 3 (द) 0

(iii) सारणिक $\begin{vmatrix}\cos 50^o & \sin 10^o\\ \sin 50^o & \cos 10^o\end{vmatrix}$ का मान है–

(अ) 0 (ब) 1 (स) $\frac{1}{2}$ (द) $-\frac{1}{2}$

(iv) आव्यूह A व्युत्क्रमणीय आव्यूह कहलाता है यदि–

(अ) $|A|=0$ (ब) $|A|\neq 0$ (स) $|A|=1$ (द) $|A|=-1$

(v) फलन $y=\sin^2 x$ का x के सापेक्ष अवकलन होगा ?

(अ) $\sin 2x$ (ब) $\cos 2x$ (स) $\cos^2 x$ (द) $\sin x\cos x$

(vi) वक्र $y=\frac{x-1}{x-2}, x\neq 2$ के बिन्दु $x=10$ परस्पर्श रेखा की प्रवणता होगी ?

(अ) $\frac{1}{64}$ (ब) $-\frac{1}{64}$ (स) $-\frac{1}{32}$ (द) $\frac{1}{32}$

(vii) $\int b^x db$ बराबर है–

(अ) $\frac{b^{x+1}}{x+1}+c$ (ब) $xb^{x-1}+c$ (स) $b^x\log_e b+c$ (द) $\frac{b^{x-1}}{x-1}+c$

$(viii)$ अवकल समीकरण $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}=2$ की कोटि तथा घात क्रमशः होगी ?

(अ) 1,3 (ब) 1,4 (स) 4,1 (द) 3,1

(ix) सदिश $\vec{a}$ का परिमाण $|\vec{a}|$ हो, तो ?

(अ) $|\vec{a}|>0$ (ब) $|\vec{a}|<0$ (स) $|\vec{a}|\leq 0$ (द) $|\vec{a}|\geq 0$

(x) यदि $P(B)=0.5$ और $P(A\cap B)=0.32$ हो, तो $P\left(\frac{A}{B}\right)$ का मान होगा ?

(अ) 0.16 (ब) 0-48 (स) 0-36 (द) 0.64

2. यदि $\begin{bmatrix} k+4 & -1 \\ 3 & k-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ तो a का मान ज्ञात कीजिए।

3. सारणिक $\begin{vmatrix} 7 & -18 \\ 5 & -11 \end{vmatrix}$ में अवयव 7 का उपसारणिक लिखिए।

4. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए।

5. फलन $y = \log_e(\sec x + \tan x)$ का x के सापेक्ष अवकलन करने पर $\frac{dy}{dx}$ का मान लिखिए।

6. $\int 5^{3\log_5 x} dx$ का मान लिखिए।

7. वक्र $y = \sin x$ तथा $x-$ अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल लिखिए, जबकि $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

8. समान दिशा वाले दो विभिन्न सदिश लिखिए।

9. यदि एक सदिश OX, OY तथा OZ अक्षों के साथ क्रमशः α, β तथा γ कोण बनाता है तो $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$ का मान लिखिए।

10. अवकलन समीकरण $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ का हल होगा ?

11. $\int \frac{dx}{a^2 + b^2x^2} = ...$

खण्ड ब

12. यदि $4\sin^{-1} x + \cos^{1} x = \pi$ तो x का मान ज्ञात कीजिए।

13. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ हो, तो AA^T ज्ञात कीजिए।

14. यदि सारणिक $A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & -7 \end{vmatrix}$ हो तो तृतीय पक्ति के अवयवों की उपसारिणक एवं सहखण्ड लिखिए।

15. फलन $f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$ की $x = 0$ परसंततता का परीक्षण कीजिए।

16. $\int \frac{\sec^4 x}{\sqrt{\tan x}} dx$ ज्ञात कीजिए।

17. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + \sqrt{\left(\frac{1-y^2}{1-x^2}\right)} = 0$ को हल कीजिए।

18. उस रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $A(2,-1,1)$ से गुजरती है और जो बिन्दुओं $B(-1,4,1)$ तथा $C(1,2,2)$ को मिलाने वाली रेखा के समान्तर हैं।

19. यदि दो घटनाएं A तथा B इस प्रकार से है कि $P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{2}$ तथा $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ तो $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ ज्ञात कीजिए।

खण्ड स

20. यदि $\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = \alpha$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\alpha + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\alpha$

या

सिद्ध कीजिए कि $\cos\left[\tan^{-1}\left\{\sin\left(\cot^{-1} x\right)\right\}\right] = \sqrt{\frac{(x^2+1)}{(x^2+2)}}$

21. वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जिसमें फलन

$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 5$

(1) वर्धमानहैं। (2) ह्रासमान है।

या

वक्र $x^2+y^2-2x-3=0$ पर उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जहां स्पर्श रेखा दोनों अक्षों से समान कोण बनाती है।

22. यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ मात्रक सदिश इस प्रकार है कि $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ तो $\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{c}+\vec{c}.\vec{a}$ का मान ज्ञात कीजिए।

या

किसी सदिश $\vec{a}$ के लिए सिद्ध कीजिए कि

$|\vec{a}\times\hat{i}|^2+|\vec{a}\times\hat{j}|^2+|\vec{a}\times\hat{k}|^2=2|\vec{a}|^2$

23. वक्र $x^2+y^2=1$ व $x+y=1$ के मध्यवर्ती प्रथम चतुर्थांश में स्थित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

या

रेखा $y=3x+2$, x अक्ष एवं कोटियों $x=-1$ तथा $x=1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

खण्ड द

24. आव्यूह सिद्धान्त का प्रयोग कर निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए।

$$2x-y+3z=9$$
$$x+y+z=6$$
$$x-y+z=2$$

या

यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $A^2-4A-5I=0$ जहां $O=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ एवं $I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

25. ताश के 52 पतों की एक भली–भांति फेटी गई गड्डी में से तीन पते निकाले गए हैं। इक्कों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

या

एक थैले में 5 सफेद तथा 3 काली गेंदे है। थैले में से 4 गेंदे उतरोतर बिना प्रतिस्थापना के निकाली जाती है। इन गेंदों के एकान्तरतः विभिन्न रंगों के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

खण्ड य

26. सिद्ध कीजिए फलन $\sin^2 x\left(1+\cos x\right)$ का मान $\cos x=\dfrac{1}{3}$ पर उच्चिष्ठ है।

या

$\int e^x\left(\dfrac{1-\sin x}{1-\cos x}\right)dx$ कामानज्ञातकीजिए।

या

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\dfrac{\cos x}{1+e^x}dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

27. हल कीजिए $xdy-ydx=\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}dx$

या

हल कीजिए

$\left(1-x^2\right)\dfrac{dy}{dx}+2xy=x\sqrt{\left(1-x^2\right)}$

या

यदि $y=a\cos nx+b\sin nx$, तब सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{d^2y}{dx^2}+n^2y=0$

28. सिद्ध कीजिए कि रेखाएं

$\vec{r}=\left(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}\right)+\lambda\left(3\hat{i}-\hat{j}\right)$ और $\vec{r}=\left(4\hat{i}-\hat{k}\right)+\mu\left(2\hat{i}+3\hat{k}\right)$ प्रतिच्छेद करती है। प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

या

निम्नलिखित दी गई रेखाओं L_1 और L_2 $\vec{r}=\left(\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}\right)+\lambda\left(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}\right)$ और $\vec{r}=\left(3\hat{i}+3\hat{j}-5\hat{k}\right)+\mu\left(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}\right)$ के मध्य न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

सिद्ध कीजिए कि बिन्दुओं (a,b,c) और (a',b',c') को मिलाने वाली रेखा मूल बिन्दु से गुजरती है यदि $aa'+bb'+cc'=pp'$ जहां p और p' इन बिन्दुओं की मूल बिन्दु से दूरियाँ है।

ALLEN CAREER INSTITUTE KOTA (RAJASTHAN)
path to success
SIKAR, RAJASTHAN

सपने होंगे सच

Pre-Nurture & Career Foundation Division

Class 6th to 10th | NTSE | OLYMPIADS & BOARD

Admission Open

Session 2021-22

New Batches for

Class 6th to 10th

7 April & 12 May 2021

(*ENGLISH MEDIUM*)

Strong Foundation Leads to

EXTRAORDINARY RESULTS

ALLEN SIKAR
Classroom Students
Qualified for

INMO
Indian National Mathematical Olympiad
&
INJSO
Indian National Junior Science Olympiad
(Conducted by HBCSE)

KRISH GUPTA
Class: 10th

DINESH BENIWAL
Class: 10th

HIMANSHU THALOR
Class: 9th

ALLEN® SIKAR Result : JEE (Adv.) 2020

प्रथम वर्ष में ही JEE (Adv.) का सर्वश्रेष्ठ परिणाम

AIR
736

AIR
836

SUBHASH
Classroom Student

KULDEEP SINGH CHOUHAN
Classroom Student

ALLEN® SIKAR Result : JEE (Main) 2021 (Feb. Attempt)

दो साल बेमिसाल

एलन सीकर ने गढ़े कीर्तिमान,
जेईई-मेन में दिए
शेखावाटी टॉपर्स

MATHEMATICS
100
PERCENTILE

शेखावाटी टॉपर

शेखावाटी गर्ल्स टॉपर

ROHIT KUMAR
Classroom
99.9892474 %tile

SAKSHI GUPTA
Classroom
99.8925637 %tile

ALLEN® SIKAR Result : NEET (UG) 2020

प्रथम वर्ष में एलन सीकर, क्लासरूम के 165 + विद्यार्थियों को मिला सरकारी मेडिकल कॉलेज में प्रवेश

680/720
AIR 695
AIIMS Jodhpur

675/720
AIR 866
AIIMS Jodhpur

LAVPREET KAUR GILL
Classroom Student

AYUSH SHARMA
Classroom Student

SARVANISHTHA | RAHUL BHINCHAR | JITENDRA P.S. RATHORE | AYUSH CHOUDHARY | RAVEENA CHOUDHARY | AAKANKSHA CHAUDHARY | RAMPRATAP CHOUDHARY

PRACHI RAJPUROHIT | NIKITA | DAYANAND JYANI | ANNU | DEEPIKA GOENKA | OM PRAKASH JAT | PRAVEEN KUMAR YADAV

ADITI | MANASVI JANGIR | SANJAY SAIN | SUMIT CHOUDHARY | ANKIT | HEMANT DHAYAL

UPCOMING NEW BATCHES for JEE (Main+Adv.) & NEET (UG)

(Hindi & English Medium)

NURTURE BATCH	ENTHUSIAST BATCH	LEADER BATCH
(For Class 10^{th} to 11^{th} Moving Students) Starting from	(For Class 11^{th} to 12^{th} Moving Students) Starting from	(For Class 12^{th} Appeared / Pass Students) Starting from
2, 9, 16 June & 30 June 2021	**7 April 2021** Both 11^{th} & 12^{th} syllabus will be covered	**2 June & 16 June 2021**

ALLEN® SIKAR

TEAM ALLEN @ SIKAR

एलन स्कॉलरशिप एडमिशन टेस्ट (ASAT)

04, 11, 25 अप्रैल 2021 | 09, 23, 30 मई 2021,
06, 13, 20, 27 जून 2021

90% तक स्कॉलरशिप

ALLEN® CAREER INSTITUTE KOTA (RAJASTHAN) path to success

DOWNLOAD FREE SAMPLE PAPERS

ALLEN Sikar Center: "SANSKAR," Near Piprali Circle, Sikar-Jhunjhunu Bypass, Piprali Road, Samrathpura, Sikar
Tel.: 01572-262400 | **E-mail** : sikar@allen.ac.in

Corporate Office : "SANKALP", CP-6, Indra Vihar, Kota (Raj.) INDIA, 324005
Tel.: 0744-2757575 | **Email**: info@allen.ac.in | **Web**: www.allen.ac.in

ALLEN Info & Admission App
Download from Google play

www.allen.ac.in/sikar | facebook.com/allensikar | twitter.com/allensikar | youtube.com/allencareerinstitute